Mathematik für Physiker 1

Margarita Kraus

2. März 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen

1.1 Grundlegende Notationen

$=$	Gleichheitszeichen
$:=$	linke Seite wird durch rechte Seite definiert
$=:$	rechte Seite wird durch links Seite definiert
$a \implies b$	Aussage a impliziert Aussage b
$a \not\Rightarrow b$	Aussage a impliziert nicht Aussage b
$a :\Leftrightarrow b$	Ausdruck a wird durch b definiert
$a \Leftrightarrow b$	Ausdruck a ist äquivalent zu Ausdruck b
$\wedge$	und zugleich
$\vee$	oder
$\neg$	nicht
$<$	kleiner
$A \cup B$	Menge A vereinigt mit Menge B
$A \cap B$	Schnittmenge/Durchschnitt von Menge A und Menge B
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge von Menge A - Menge aller Teilmengen von A
$x \in A$	x Element von A
$\#A$	die Mächtigkeit von A, Anzahl der Elemente von A
$A \subseteq B$	Menge A Teilmenge von Menge B; $x \in A \implies x \in B$
$B \supseteq A$	$:\Leftrightarrow A \subseteq B$
$A \backslash B$	Komplement von B in A; $\{x \in A \| x \notin B\} = \{x \in A : x \notin B\}$
$A \times B$	Kartesisches Produkt der Mengen A und B;
	$A \times B := \{(x, y) \| x \in A, y \in B\}$
$\forall\ (x \in A)$	für alle $x \in A$
$\exists\ (x \in A)$	es existiert ein $x \in A$

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

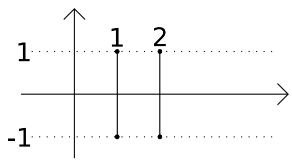
$a|b$ $\quad$ a ist Teiler von b für $a, b \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}_{>} = \mathbb{R}^{+} \quad \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$

$\mathbb{R}_{\geq} = \mathbb{R}_0^{+} \quad \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$

1.2 Beispiele

1. $x^2 = 1 \not\Rightarrow x = 1$. Aber $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$
2. $(a \leq b) \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b)$
3. $(a > b) :\Leftrightarrow (b < a)$
4. $x \cdot y > 0 \not\Rightarrow (x > 0) \wedge (y > 0)$
5. $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$
6. $A = \{1, 2, 3\}, \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$
7. $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}_0 = \{-1, -2, -3, \dots\}$
8. $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(p, q) | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
9. $A := \{1, 2\} \wedge B := \{-1, 0, 1\} \implies A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}$
10. $C = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$
    $\implies A \times C = \{(1, x) | x \in [-1, 1]\} \cup \{(2, x) | x \in [-1, 1]\}$



11. $A := \{1, 2, 3\}, B := \{a, b\}$
    $A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

2 Abbildungen

2.1 Definitionen und Notationen

Eine *Abbildung* f zwischen zwei Mengen A und B ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet. Man schreibt dann $f : A \to B, a \mapsto f(a)$.

A heißt *Definitionsbereich*; B heißt *Zielmenge*.

Ist $A_0 \subseteq A$, dann heißt $f(A_0) := \{f(x) | x \in A_0\} \subseteq B$ das *Bild* von A_0 unter f. $f(A)$ heißt das *Bild* oder der *Wertebereich* von f.

Ist $B_0 \subseteq B$, dann heißt $f^{-1}(B_0) = \{x \in A | f(x) \in B_0\}$ das *Urbild* von B_0 unter f.

Ist $x \in B$, so schreibt man kurz: $f^{-1}(x) := f^{-1}(\{x\})$. (Vorsicht: f^{-1} ist im Allgemeinen keine Abbildung.)

$G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\} \subseteq A \times B$ heißt der *Graph* von f.

2.2 Notation und Beispiel

a) Ist A eine Menge, so ist die *Identität* $f = \mathrm{id}_A : A \to A, a \mapsto a$ eine Abbildung mit Wertebereich A. Der Graph von f ist die Diagonale in $A \times A$, d.h. $G_{\mathrm{id}_A} = \{(a, a) | a \in A\}$. Für $a \in A$ ist $f^{-1}(a) = a$.

b) Ist $A_0 \subseteq A$ eine Teilmenge, so ist die *Inklusion* $f = j : A_0 \to A, a \mapsto a$ eine Abbildung mit Wertebereich A_0. Für $a \notin A_0$ ist $f^{-1}(a) = \emptyset$.

c) Ist B eine weitere Menge, so ist die *Projektion* $\mathrm{pr} : A \times B \to A, (x, y) \mapsto x$ eine Abbildung mit Wertebereich A. Für $a \in A$ ist $f^{-1}(a) = \{(a, b) | b \in B\}$.

2.3 Definitionen (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

Seien A und B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow (f(x) = f(y) \implies x = y)$
surjektiv $:\Leftrightarrow$ Für jedes $y \in B$ existiert ein $x \in A$ mit $f(x) = y$
bijektiv $:\Leftrightarrow$ f ist surjektiv und injektiv

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ heißt eine *Folge* in A. Eine *Abzählung* von A ist eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$. Eine Menge A heißt *abzählbar*, falls A nur endlich viele Elemente besitzt ($\#A < \infty$) oder eine Abzählung von A existiert.

2.4 Beispiele

1. Ist A eine Menge, so ist die Identität: $\mathrm{id}_A : A \to A, a \mapsto a$ bijektiv.

2. Ist $A_0 \subseteq A$, dann ist die Inklusion $j : A_0 \to A, a \mapsto a$ injektiv, aber für $A_0 \neq A$ nicht surjektiv.

3. Sind A, B Mengen, so ist die Projektion $p : A \times B \to A, (a, b) \mapsto a$ surjektiv, aber nur dann injektiv, falls B aus genau einem Element besteht.

4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$ ist injektiv, aber nicht surjektiv, denn für n ungerade ist $f^{-1}(n) = \emptyset$.

5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
6. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ ist eine Bijektion, also ist $\mathbb{Z}$ abzählbar.
7. Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, (p, q) \mapsto \frac{p}{q}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
8. Die Abbildung

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \frac{p}{q} \mapsto \begin{cases} (p, q) & \text{wobei } \mathrm{ggT}(|p|, q) = 1 \text{ und } \frac{p}{q} \neq 0 \\ (0, 1) & \text{für } \frac{p}{q} = 0 \end{cases}$$

   ist injektiv, aber nicht surjektiv.
9. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $n \in \mathbb{N}_0$ durch $n(n+1)/2 < k \leq (n+1)(n+2)/2$ gegeben. Setze $f(k) := \big(k - \frac{n(n+1)}{2}, \frac{(n+1)(n+2)}{2} - k + 1\big)$.
10. Analog ist auch $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ abzählbar.

2.5 Bemerkung

a) Ist X eine abzählbare Menge, so ist auch jede Teilmenge von X abzählbar

b) Existiert eine Bijektion $X \to Y$ und ist X abzählbar, so auch Y.

c) Aus a), b) und 2.4,10 folgt: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

d) $\mathbb{R}$ ist *nicht* abzählbar.

2.6 Definitionen (Komposition, Inklusion, inverse Abbildung)

Sind $f : A \to B, g : B \to C$ Abbildungen, so bezeichnet man mit $g \circ f : A \to C, (g \circ f)(x) := g(f(x))$ die *Komposition* von g und f.

Ist $A_0 \subseteq A, j : A_0 \to A$ die Inklusion, so schreibt man auch $f|A_0$ statt $f \circ j$. $f|A_0$ heißt die *Einschränkung* von f auf A_0.

Ist $f : A \to B$ bijektiv, dann heißt die Abbildung $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ die *inverse Abbildung* zu f. Man schreibt auch $g = f^{-1}$.

2.7 Bemerkung

Man zeigt leicht, dass es stets nur eine inverse Abbildung gibt, also f^{-1} eindeutig bestimmt ist.

2.8 Notation und Definition

Ist $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, dann heißt eine Bijektion $M_n \to M_n$ eine *Permutation.* Die Menge aller Permutationen von M_n bezeichnet man mit $S(n)$ und heißt die *symmetrische Gruppe.*
Für $f \in S(n)$ schreibt man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

Eine Permutation, die alle bis auf 2 Elemente festlässt und diese vertauscht, heißt *Transposition.* Die Transposition, die i und $i+1$ vertauscht, bezeichnet man mit τ_i, also

$$\tau_i = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & i+1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & i+1 & i & \ldots & n \end{pmatrix}$$

2.9 Beispiele

$S(1) = \{\mathrm{id}_{\{1\}}\}$

$S(2) = \{\mathrm{id}_{\{1,2\}}, \tau_1\}$

$$S(3) = \left\{\mathrm{id}_{\{1,2,3\}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \tau_1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \tau_2, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.10 Notiz

Für jede Transposition τ gilt: $\tau \circ \tau =: \tau^2 = id$, also $\tau^{-1} = \tau$.

3 Relationen

3.1 Definition

Unter einer *Relation* R auf einer Menge M versteht man eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. Eine Relation heißt

a) *reflexiv*, falls für alle $a \in M$ gilt $(a, a) \in R$;

b) *symmetrisch*, falls aus $(a, b) \in R$ auch $(b, a) \in R$ folgt;

c) *transitiv*, falls aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ auch $(a, c) \in R$ folgt.

Eine *Äquivalenzrelation* auf M ist eine reflexive, symmetrische transitive Relation auf M.

3.2 Beispiele

a) $R = \{(x,x) \mid x \in A\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf A.

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist eine symmetrische Relation auf $\mathbb{R}$, aber keine Äquivalenzrelation.

c) $R = \{\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = y_1\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$.

d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ ist eine transitive Relation auf $\mathbb{R}$.

3.3 Notation

Ist R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, so schreibt man $x \sim y$, falls $(x,y) \in R$. Die Menge

$$[x] := \{x' \in A \mid x \sim x'\}$$

heißt *Äquivalenzklasse* von x, und x' heißt *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[x]$, falls $x' \in [x]$. Der *Modulraum* $X/\sim$ ist durch $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ gegeben.

3.4 Beispiele

a) $R = \{(x,x) \in A \times A \mid x \in A\}$. Dann ist $[x] = \{x\}$.

b) $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = y_1\}$. Dann ist für alle $x_1, x', y' \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} (x_1,x') & \sim & (x_1,y') \\ \text{und } [(x_1,x_2)] & = & \{(x_1,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

3.5 Definition

Sei X eine Menge. Dann heißt eine Teilmenge $R \subseteq (X \times X)$ eine *Ordnungsrelation* oder *totale Ordnung* auf X, falls gilt:

1. R ist *transitiv*, d.h. ist $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$, so ist $(x,z) \in R$.

2. Für $a, b \in X$ mit $a \neq b$ gilt stets *genau eine* der beiden Möglichkeiten:
$$(a,b) \in R \quad \text{oder} \quad (b,a) \in R.$$

3. $(a,a) \notin R$ für alle $a \in X$.

Man sagt, X ist durch R *total geordnet*. Schreibt man $a < b \Leftrightarrow (a,b) \in R$, dann spricht man auch von der Ordnung $<$.

3.6 Beispiele

a) $\mathbb{R}$ ist durch $<$ total geordnet: $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x < y\}$

b) $\mathbb{R}$ ist auch durch $>$ total geordnet.

4 Beweistechniken

4.1 Direkter Beweis

Beispiel: Es gilt $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$ für alle $n > m > 0$.

Beweis: Sei $n > m > 0$. Dann gilt

$$nm + n > nm + m, \text{ also } n(m+1) > m(n+1).$$

Da $n > 0$ folgt daraus:

$$\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n} \qquad \square$$

4.2 Beweis durch vollständige Induktion

Diese Beweistechnik wird in folgender Situation angewandt:
Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und für jedes $n \in \mathbb{Z}_0$ mit $n \geq n_0$ eine Aussage $\mathfrak{A}(n)$ gegeben.
Zu zeigen ist: $\mathfrak{A}(n)$ ist wahr *für alle* $n \geq n_0$. Meist ist $n_0 = 1$ oder 0.

Beispiele zur Anwendung dieser Beweistechnik

a) Zeige für alle $n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

b) Zwischen 2 Mengen mit n Elementen gibt es genau $n!$ Bijektionen.

c) Für $h \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Bernoullische Ungleichung: $(1+h)^n \geq 1 + hn$.

d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die binomische Formel: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

e) Jede Permutation kann als Komposition von Transpositionen geschrieben werden.

Die Beweismethode beruht auf folgender Tatsache

Sei $W \subseteq \mathbb{N}_0$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, mit folgenden Eigenschaften:

1. $n_0 \in W$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$
2. $n \in W \implies (n+1) \in W$

Dann gilt $W \supseteq \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\} = \mathbb{N}_0 \backslash \{0, 1, \dots, n_0-1\} = \{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0\}$. Daraus erhält man mit $W = \{n \in \mathbb{N} | \mathfrak{A}(n) \text{ ist richtig}\}$ folgendes Beweisschema:

1. IB (Induktionsbeginn) Zeige: Die Behauptung ist richtig für $n = n_0$.
2. IA (Induktionsannahme): Sei $n \geq n_0$ und $\mathfrak{A}(n)$ wahr.
3. IS (Induktionsschritt): $\mathfrak{A}(n)$ wahr $\implies \mathfrak{A}(n+1)$ wahr.

2. und 3. können zusammengefasst werden: IA+IS. Ist $\mathfrak{A}(n)$ wahr, so folgt auch $\mathfrak{A}(n+1)$.

Beweis von Beispiel a)

IB: Behauptung ist offensichtlich wahr für $n = 1$.

IA: Sei $n \geq n_0$ und $\mathfrak{A}(n)$ wahr.

IS: Dann gilt auch $\mathfrak{A}(n+1)$, denn:

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + n + (n+1) &= \tfrac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= (n+1)(\tfrac{1}{2}n + 1) \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

□

Beweis von Beispiel b)

IB: Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $n = 1$.

IA: Die Behauptung sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS: Seien X, Y zwei Mengen mit $n+1$ Elementen. Sei $x_0 \in X$. Dann gibt es nach IA für jedes $y_0 \in Y$ genau $n!$ Bijektionen zwischen $X \backslash \{x_0\}$ und $Y \backslash \{y_0\}$, denn $X \backslash \{x_0\}$ und $Y \backslash \{y_0\}$ bestehen aus n Elementen. Also gibt es für jedes $y_0 \in Y$ genau $n!$ Bijektionen zwischen X und Y, die x_0 auf y_0 abbilden. Da $y_0 \in Y$ beliebig gewählt werden kann und Y aus $n+1$ Elementen besteht, gibt es $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Bijektionen zwischen X und Y. □

4.3 Beweis durch Widerspruch

Wir nutzen folgende Äquivalenz der Implikationen aus:

$$(\mathfrak{A} \implies \mathfrak{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathfrak{B} \implies \neg\mathfrak{A})$$

$\neg\mathfrak{B} \implies \neg\mathfrak{A}$ heißt die *Kontraposition* zu $\mathfrak{B} \implies \mathfrak{A}$.

Beispiel:

a) Wenn es regnet, ist die Straße nass.
Kontraposition: Wenn die Straße nicht nass ist, regnet es *nicht*.

b) $(x > 0 \wedge y > 0) \Longrightarrow x \cdot y > 0$.
Kontraposition: $x \cdot y \leq 0 \Longrightarrow (x \leq 0 \vee y \leq 0)$.

Beachte:

1. Das $\vee$ ist nicht ausschließend.
2. In Aussage und Kontraposition steht nur ein $\Longrightarrow$, kein $\Longleftrightarrow$.

Die *Form* des Beweises ist entweder:

Angenommen $\neg\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A} \implies \cdots \implies$ *Widerspruch.* $\square$
oder:
Angenommen $\neg\mathfrak{B}\ldots \implies \neg\mathfrak{A}.$: *Widerspruch.* $\square$

Beispiel:

Behauptung: Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$ ($a^2 = 2 \implies a \notin \mathbb{Q}$).

Beweis:

Angenommen $a^2 = 2$ und $a \in \mathbb{Q}$.
Dann existieren $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, p \neq 0$ mit $a = \frac{p}{q}$, $ggT(|p|, q) = 1$.
Also ist $2q^2 = p^2$. Also ist p^2 gerade, also auch $|p|$ gerade. Also ist p^2 durch 4 teilbar, also ist q^2 gerade, also ist auch q gerade, also ist $ggT(|p|, q) \neq 1$.
Widerspruch. $\square$

4.4 Allgemeine Bemerkung zum Beweisen

Schreiben Sie stets ganze Sätze und verbinden Sie Rechnungen durch $\Longrightarrow$ oder $\Longleftrightarrow$. Formulieren Sie Voraussetzung und Behauptung klar. Um $\mathfrak{A} \Longleftrightarrow \mathfrak{B}$ zu zeigen, ist es oft günstig, $\mathfrak{A} \implies \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \implies \mathfrak{A}$ getrennt zu zeigen.

5 Gruppen und Körper

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Gesetzmäßigkeiten, denen die Addition und Multiplikation auf den Zahlenmengen gehorchen, zu präzisieren und zu verallgemeinern. Für die Addition in den rationalen Zahlen gelten folgende Gesetze:
Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\begin{array}{ccccl} (a+b)+c & = & a+(b+c) & & \text{(Assoziativität)} \\ a+b & = & b+a & & \text{(Kommutativität)} \\ 0+b & = & b & & \text{(0 ist Neutrales)} \end{array}$$

Weiter gilt: Für alle $a \in \mathbb{Q}$ existiert ein $b \in \mathbb{Q}$ mit $a + b = 0$ (nämlich $b = -a$), dieses b ist Inverses zu a.

5.1 Definition (Assoziativität, neutrales und inverses Element, abelsche Gruppen)

Unter einer *Gruppe* $(G, *)$ versteht man eine Menge G zusammen mit einer Abbildung: $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a * b$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c \in G$ (*Assoziativität*).
2. Es existiert ein *neutrales Element* $n \in G$, d.h. es existiert ein $n \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt: $n * a = a$.
3. Zu jedem $a \in G$ existiert ein *inverses Element* $a^* \in G$, d.h. ein Element $a^* \in G$ mit $a^* * a = n$.

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn für alle $a, b \in G$ gilt: $a * b = b * a$.

5.2 Notation

Ist klar, welche Verknüpfung $*$ gemeint ist, spricht man auch von der Gruppe G statt von $(G, *)$.

Ist G abelsch, so schreibt man statt „$*$“ oft „$+$“, statt „n“ oft „0“ und statt „a^*“oft „$-a$“.

Schreibt man statt „$*$“„$\cdot$“, so schreibt man (meist) statt „n“„1“und statt „a^*“ „a^{-1}“ oder „$\frac{1}{a}$“.

5.3 Beispiele

1. $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}_0, +)$ bilden keine Gruppen, da 5.1, 3. nicht erfüllt ist.
2. $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ bilden Gruppen, welche auch abelsch sind: Das neutrale Element n ist 0 und das Inverse zu a ist $a^* = -a$.
3. $(\mathbb{R}^n, +)$, wobei
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$
ist eine abelsche Gruppe.
4. $M(n \times k, \mathbb{R}) = \left\{ (a_{ij})_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots k}} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Addition
$$(a_{ij})_{i,j} \ + \ (b_{ij})_{i,j} \ = \ (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$
ist eine abelsche Gruppe.

5. $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist keine Gruppe, denn 0 hat kein Inverses.

6. $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe, denn das neutrale Element ist $1 \in \mathbb{Q}$, und für $0 \neq q$ ist $\frac{1}{q}$ das Inverse zu q. Ebenso ist $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe.

7. $(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, +)$, wobei $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ist eine abelsche Gruppe.

8. $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist *keine* Gruppe, weil 5.1, 3. nicht erfüllt ist.

9. Die symmetrische Gruppe $(S(n), \circ)$ mit der Komposition als Verknüpfung ist eine nichtabelsche Gruppe.

10. Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit der Matrizenmultiplikation bildet eine nichtabelsche Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$, (vergleiche Übungen).

11. Verallgemeinerung von 9.:
Ist X eine Menge $G := \mathrm{Bij}\,(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ bijektive Abbildung}\}$, so ist $(G, \circ)$ eine Gruppe. Im Allgemeinen ist diese Gruppe nichtabelsch.

5.4 Bemerkung (Eindeutigkeit neutraler/inverser Elemente)

5.4.1 Rechtsinverses gleich Linksinverses

Ist a^* das inverse Element von a, so folgt (auch in nichtabelschen Gruppen!) stets: $a * a^* = n$, denn ist a^{**} das Inverse Element zu a^*, so gilt:

$$a * a^* = (a^{**} * a^*) * a * a^* = a^{**} * (a^* * a) * a^* = a^{**} * a^* = n$$

Analog folgt: Inverse Elemente sind eindeutig bestimmt, für das neutrale Element gilt stets $a * n = a$, und $a^{**} = a$.

5.4.2 Eindeutigkeit des neutralen Elements

Ist $(G, *)$ eine Gruppe, so ist das neutrale Element n eindeutig bestimmt: Ist m ein weiteres Element $m \in G$, mit $m * a = a$ für alle $a \in G$, so existiert ein $m^* \in G$ mit $m * m^* = n$, also

$$m = n * m = (m * m^*) * m = m * (m^* * m) = m * n = n.$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt, da n neutral, das letzte, da m neutral ist.

5.5 Definition

Ist $(G, *)$ eine Gruppe, $G_0 \subseteq G$ eine Teilmenge, so heißt $G_0 \subseteq G$ eine *Untergruppe*, falls $(G_0, *)$ wieder eine Gruppe ist.

5.6 Bemerkung

Eine Teilmenge $G_0 \subseteq G$ einer Gruppe $(G, *)$ ist eine Untergruppe, falls gilt:

1. $n \in G_0$.
2. Ist $g \in G_0$, so auch $g^* \in G_0$.
3. Ist $g_1, g_2 \in G_0$, so auch $g_1 * g_2 \in G_0$.

   Ist $\#G_0 < \infty$, so kann man dies leicht mit einer Verknüpfungstabelle überprüfen, in der $g_i * g_j$ für alle $g_i, g_j \in G$ aufgeführt sind.

5.7 Beispiele

a) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ist Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$.

b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ist *keine* Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

c) $\mathbb{Z}\backslash\{0\} \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist *keine* Untergruppe von $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$.

d) $\mathbb{Z}_2 := (\{-1, +1\}, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine Untergruppe.

e) $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist Untergruppe von $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$.

5.8 Definition

Sind $(G, *)$ und $(H, *)$ Gruppen. So heißt eine Abbildung $f : G \to H$ *Homomorphismus*, falls $f(g_1 * g_2) = f(g_1) * f(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt.

5.9 Beispiele

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto 2z$ ist ein Homomorphismus.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_>, x \mapsto e^x$ ist ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_>, \cdot)$, denn $f(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x) \cdot f(y)$.

c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto z + 1$ ist *kein* Homomorphismus, denn $f(z_1 + z_2) = z_1 + z_2 + 1 = f(z_1) + f(z_2) - 1$.

d) $\operatorname{sign} : S(n) \to \mathbb{Z}_2, \operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. (Beweis als Übungsaufgabe.)

5.10 Bemerkung

Ist $f : G_1 \mapsto G_2$ ein Homomorphismus und sind $n_1 \in G_1, n_2 \in G_2$ die neutralen Elemente in G_1 und G_2, so ist $f(n_1) = n_2$, denn

$$f(g) = f(n_1 * g) = f(n_1) * f(g).$$

Weiter gilt $f(g^*) = (f(g))^*$, denn

$$f(g^*) * f(g) = f(g^* * g) = f(n_1) = n_2.$$

5.11 Definition (des Körpers)

Unter einem *Körper* versteht man ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus

1. einer abelschen Gruppe $(K, +)$ mit neutralem Element 0
   und

2. einer abelschen Gruppe $(K \backslash 0, \cdot)$ mit neutralem Element 1,

sodass für alle $a, b, c \in K$ das *Distributivgesetz* gilt:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

5.12 Beispiel

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper, ebenso $(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$.

2. Weitere Beispiele in den Übungen.

5.13 Bemerkung

In einem Körper gilt stets: $0 \cdot x = 0$, denn $x = 1 \cdot x = (1 + 0)x = x + 0 \cdot x$, und $(-1) \cdot x = -x$, denn $0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = x + (-1) \cdot x$ für alle $x \in K$.

5.14 Definition (von geordneten Körpern)

Ein Körper $(K, +, \cdot)$ mit einer totalen Ordnung R auf K heißt geordneter Körper, falls gilt:

1. Ist $(x, y) \in R$, so auch $(x + a, y + a) \in R$ für alle $a \in K$.

2. Ist $(x, y) \in R$ und $(0, a) \in R$, so ist auch $(ax, ay) \in R$.

5.15 Beispiel

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ mit der Ordnung $(x, y) \in R \iff x < y$ ist ein geordneter Körper. Ebenso ist $\mathbb{R}$ mit dieser Ordnung ein Körper.

5.16 Bemerkung (zu geordneten Körpern)

a) In einem geordnetem Körper gilt stets: $(0, x) \in R \Leftrightarrow (-x, 0) \in R$, denn $(0, x) \in R \Leftrightarrow (-x + x, x) \in R \Leftrightarrow (-x, 0) \in R$.

b) $(0, x^2) \in R$, falls $x \neq 0$, denn entweder

   $(0, x) \in R$, dann folgt aus 5.14, 2. $(0, x^2) \in R$, oder

   $(x, 0) \in R$, dann ist $(0, -x) \in R$, also $(0, (-x)^2) = (0, x^2) \in R$.

5.17 Folgerung

Auf $\mathbb{C}$ existiert keine totale Ordnung auf R, so dass $\mathbb{C}$ ein geordneter Körper ist.

Beweis:

Angenommen R wäre eine totale Ordnung, die 5.14, 1. und 5.14, 2. erfüllt. Dann wäre nach 5.16, b) $(0,1) \in R$ und $(0,-1) \in R$, da $1^2 = 1$ und $i^2 = -1$, also wäre nach 5.16, a) $(0,1) \in R$ und $(1,0) \in R$ im Widerspruch dazu, dass R totale Ordnung ist.

5.18 Definition

Ist $(K, +, \cdot)$ ein durch R geordneter Körper, dann schreibt man

$$|x| := \begin{cases} x & (0,x) \in R \\ 0 & x = 0 \\ -x & (x,0) \in R \end{cases}$$

und nennt $|x|$ den *Betrag* von x.

5.19 Bemerkung

Es gilt für alle $x, y \in K$:

1. $(0, |x|) \in R$, falls $x \neq 0$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
3. Entweder $|x + y| = |x| + |y|$ oder $(|x+y|, |x| + |y|) \in R$.

Beweis:

1) Folgt sofort aus 5.16, a).

2) Ist $(0,x) \in R$ und $(0,y) \in R$, so auch $(0, x \cdot y)$ nach 5.14, 1.
Ist $(x,0) \in R$ und $(0,y) \in R$, so ist $(x \cdot y, 0) \in R$, also $|x|\ |y| = -xy$ und ebenso $|x \cdot y| = -x \cdot y$. Genauso folgt die Gleichung für $(0,x) \in R$ und $(y,0) \in R$.
Ist $(x,0) \in R$ und $(y,0) \in R$, so ist $|x|\ |y| = x \cdot y$. Ferner ist $(0,-x) \in R$ und $(0,-y) \in R$ und $(0,(-x)(-y)) = (0, x \cdot y)) \in R$, also $|x \cdot y| = x \cdot y$.
Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist $|x \cdot y| = 0 = |x| \cdot |y|$.

Fall 1: $(0,x) \in R, (0,y) \in R$.
Dann ist $(0, x + y)) \in R$ nach 5.14, 2, also $|x + y| = x + y = |x| + |y|$.

Fall 2: $(x,0) \in R, (y,0) \in R$
Dann ist $(x + y, 0) \in R$, also $|x + y| = -x - y = |x| + |y|$.

Fall 3a: $(x, 0) \in R, (0, y) \in R$ und $(x + y, 0) \in R$.
Dann ist $|x + y| = -x - y$ und $|x| + |y| = y - x$. Da $(0, y) \in R$, ist $(-y, 0) \in R$, also $(-y, y) \in R$, also $(|x + y|, |x| + |y|) \in R$ nach 5.14, 2.

Fall 3b: $(x, 0) \in R, (0, y) \in R$ und $(0, x + y) \in R$.
Dann ist $|x + y| = x + y$ und $|x| + |y| = y - x$. Da $(x, -x) \in R$, ist also $(|x + y|, |x|, |y|) \in R$.

Fall 4: $(0, y) \in R, (x, 0) \in R$ folgt analog zum Fall 3.

Fall 5: Ist $x = 0$, so ist $|x + y| = |y| = |x| + |y|$, ebenso für $y = 0$. □

6 Komplexe Zahlen

6.1 Definition und Satz (komplexe Zahlen)

Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zusammen mit Addition $+$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Multiplikation $\cdot$:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

bildet einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen. Das neutrale Element der Addition ist durch $(0, 0)$ gegeben, das neutrale Element der Multiplikation ist durch $(1, 0)$ gegeben. Wir bezeichnen diesen Körper als Körper der komplexen Zahlen mit $\mathbb{C}$ und fassen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mittels $j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto (x, 0)$ auf. Statt (x, y) schreibt man dann $x + iy$.
- Das Inverse der Additon zu $x + iy$ ist durch $-x - iy$ gegeben.
- Das Inverse der Multiplikation zu $x + iy$ ist durch $\frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ gegeben.

6.2 Notation

Wir schreiben $i = (0, 1)$ und $(a, b) =: a + bi$, also

$$i^2 = -1 = -1 + 0i$$

und

$$\begin{aligned} (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &= a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) \end{aligned}$$

6.3 Bemerkung

Es gibt keine Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$, so dass $\mathbb{C}$ ein geordneter Körper wird, vergleiche 5.17.

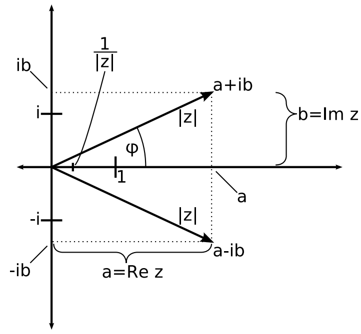
6.4 Notation (komplex konjugierte, Betrag, Argument, Imaginär- und Realteil)

Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ heißt

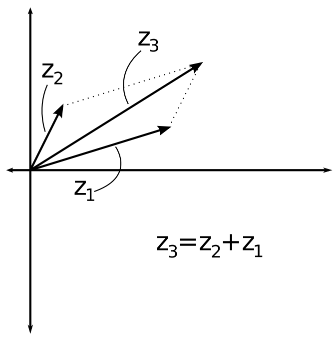
1. $\bar{z} := a - ib$ das komplex Konjugierte von z.
2. $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ der Betrag von z.
3. $\Re(z) := a$ $(= Re(z))$ der Realteil von z.
4. $\Im(z) := b$ $(=: Im(z))$ der Imaginärteil von z.
   Für $z \neq (0,0)$ ist das Argument von z durch $\arg(z) := \arctan(\frac{b}{a}) \in [0, 2\pi)$ für $a \neq 0$ und $\arg(z) := \text{arccot}(\frac{a}{b}) \in [0, 2\pi)$ für $b \neq 0$ wohldefiniert.

In der *Gaußschen Zahlenebene* kann man sich Konjugation und Addition wie folgt veranschaulichen:

Konjugation:

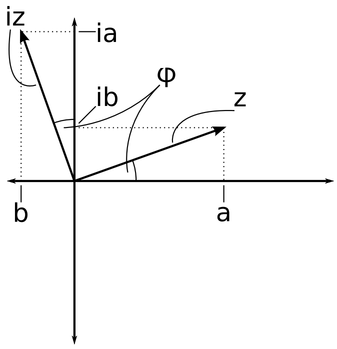


Addition:



6.5 Bemerkung (Veranschaulichung der Arithmetik)

a) Die Multiplikation mit i entspricht einer Drehung um 90° $(i(a + ib) = -b + ia)$.



b) Die Multiplikation mit $r > 0$ entspricht für $r > 1$ einer Streckung und für $r < 1$ einer Stauchung.

$$r \cdot (a + ib) = (r, 0) \cdot (a, b) = (ra, rb) = ra + irb$$

c) Die komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse ($\{z \in \mathbb{C} | \Im(z) = 0\}$).

6.6 Bemerkung (Darstellung durch cosinus und sinus)

Ist $\phi = arg(z)$, $r = |z|$, so ist offenbar

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) =: re^{i\phi}.$$

Die Multiplikation mit z ist eine Drehstreckung mit dem Streckfaktor r und um den Winkel ϕ, wie man leicht nachrechnet, wenn man die Additionstheoreme benutzt (Beweis später).

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1)) \cdot r_2(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2) \\ &\quad +i(\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + \cos(\phi_2)\sin(\phi_1))) \\ &= r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)), \text{ also} \\ r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

6.7 Notiz (Weitere Rechenregeln)

Für $z \in \mathbb{C}, z_i \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
2. $\frac{1}{z} := z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$
3. $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $\Im(z) = -\frac{1}{2}i(z - \bar{z})$
4. $|z| \geq 0$ und $(|z| = 0 \iff z = 0)$

5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
6. $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$
7. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

6.8 Bemerkung (Nullstellen von Polynomen)

Die Gleichung $z^2 = r$ hat für jedes $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ in $\mathbb{C}$ genau 2 Lösungen, λ und $-\lambda$. Für $r > 0$ ist $\lambda = \sqrt{r} \in \mathbb{R}$, für $r < 0$ ist $\lambda = i\sqrt{-r}$. Es ist dann $(z^2 - r) = (z - \lambda)(z + \lambda)$.

6.9 Beispiel

$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$. Es gilt sogar:

6.10 Satz

In $\mathbb{C}$ hat jedes Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,\ a_j \in \mathbb{C} \tag{1}$$

eine Zerlegung in Linearfaktoren

$$p(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (z - \lambda_j)^{n_j},\ n_1 + \cdots + n_j = n$$

Die $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sind die *Nullstellen* des Polynoms p der *Vielfachheit* n_i.
Insbesondere hat $z^n - re^{i\varphi}$ die Nullstellen

$$\sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k)/n}, k = 0, \ldots, n-1.$$

Sind die Koeffizienten a_j in (1) alle reell, $a_j \in \mathbb{R}$, und λ_i eine Nullstelle von p der Vielfachheit n_i, so ist auch $\bar{\lambda}_i$ eine Nullstelle von p der selben Vielfachheit.

7 Vektorräume

7.1 Definition

Sei k ein Körper. Eine abelsche Gruppe $(X, +)$ zusammen mit einer Abbildung $k \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ heißt ein k-*Vektorraum*, falls gilt:

1. $1 \cdot x = x$
2. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
3. $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
4. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

für alle $\lambda, \mu \in k$ und alle $x, y \in X$. Die Elemente $x \in X$ heißen *Vektoren*, die Elemente $\lambda \in k$ heißen *Skalare*, statt $\lambda \cdot x$ schreibt man auch λx. Die Abbildung $k \times X \mapsto X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ heißt *Multiplikation mit Skalaren*. Der Vektor $0 \in X$ heißt der *Nullvektor*. Für $k = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) spricht man vom *reellen* (bzw. *komplexen*) Vektorraum.
Ab jetzt setzen wir stets $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$ voraus.

7.2 Beispiele

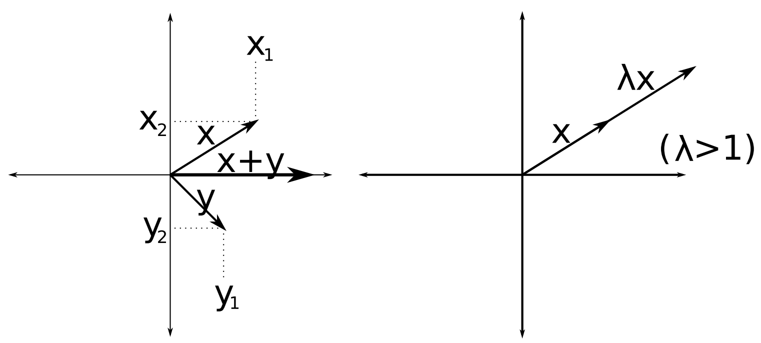
1. k ist ein k-Vektorraum

2. $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\lambda(a + ib) = \lambda a + i\lambda b$

3. $k^n := k \times \cdots \times k, n \in \mathbb{N}$ sind k-Vektorräume mit

$$k^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_i \in k \right\} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Vorstellung im $\mathbb{R}^2$:



4. Sei I ein Intervall, dann bildet die Menge $\mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$ der Abbildungen $I \to \mathbb{R}$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, zusammen mit der Multiplikation mit Skalaren
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x), \ \lambda \in \mathbb{R}$$
und der Vektoraddition
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

5. Verallgemeinerung von Punkt 4.: Ist V ein beliebiger Vektorraum, so ist die Menge $\mathrm{Abb}(I, V)$ der Abbildungen $f : I \to V$ mit der Vektoraddition und Multiplikation wie in Punkt 4. ein Vektorraum.

6. Der Raum der *Polynome* vom Grad höchstens n

$$P_n := \left\{ a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in k \right\}$$

mit der Addition und Mulitplikation wie Punkt 4. bildet einen Vektorraum.

7.3 Notiz und Definition

Sind U, V k-Vektorräume, so ist das kartesische Produkt

$$U \times V := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} | u \in U, v \in V \right\}$$

mit der Vektoraddition

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix}$$

und der Multiplikation mit Skalaren

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \end{pmatrix}$$

ein k-Vektorraum.

7.4 Definition

Sei X ein k-Vektorraum, $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die zusammen mit der Einschränkung der Addition und Multiplikation von X auf Y wieder ein Vektorraum ist, so heißt Y ein *Untervektorraum* von X.

7.5 Notiz

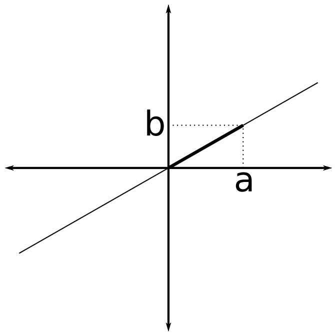
Sei X ein Vektorraum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist genau dann ein Untervektorraum von X, wenn gilt

1. $0 \in Y$
2. Für alle $y_1, y_2 \in Y$ und $\lambda \in k$ ist $\lambda y_1 + y_2 \in Y$

7.6 Beispiele

1. $\{0\} \subseteq V$ und $V \subseteq V$ sind Untervektorräume.
2. $k^m \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum. Dabei ist $0 \in k^{n-m}$.
3. $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$,

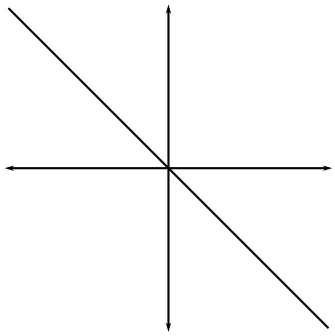
   für jedes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.



4. Ist V ein k-Vektorraum, $v \in V$, so ist $\{\lambda v | \lambda \in k\}$ ein k-Vektorraum.

5. Ist V ein k-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_m \in V$, so ist $\{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m | \lambda_i \in k\}$ ein Untervektorraum.

6. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$



7. Seien $a_{ij} \in k$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$; dann bilden

$$\left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m \right\}$$

$$= \{x \in k^n | Ax = 0\}, \text{ wobei } A = (a_{ij})_{i=1\ldots m; j=1\ldots n}$$

einen Untervektorraum von k^n.

8. $\{1\} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kein Untervektorraum.
$S^1 \subseteq \mathbb{C}$ ist kein Untervektorraum.

9. Der Raum der Polynome von Grad höchstens n, den wir mit $P_n \subseteq \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$ bezeichnen, ist ein Untervektorraum.

8 Lineare Abbildungen

8.1 Definition

Eine Abbildung $f: V \to W$ zwischen Vektorräumen heißt *linear* oder *Vektorraumhomophismus*, wenn gilt

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in V$.

2. $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in V, \lambda \in k$.

Die Menge der linearen Abbildungen $f : V \to W$ bezeichnet man mit $L(V,W)$ oder $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ $(= \mathrm{Hom}(V,W))$. Lineare Abbildungen $f : V \to V$ heißen *Endomorphismen*, man schreibt: $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V,V)$.
Ein *Isomorphismus* zwischen zwei Vektorräumen ist eine bijektive lineare Abbildung. Zwei Vektorräume V und W heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $f : V \to W$ gibt.
Wir schreiben $GL(V) := \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ ist ein Isomorphismus}\}$.

8.2 Lemma

Ist f ein Isomorphismus, so ist f^{-1} ebenfalls eine lineare Abbildung, also ebenfalls ein Isomorphismus. Auch die Verknüpfung und Summe linearer Abbildungen ist wieder linear, daher ist $GL(V)$ eine Gruppe und $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ ein k-Vektorraum.

8.3 Beispiele

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$ ist ein Isomorphismus.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$ ist keine lineare Abbildung.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist keine lineare Abbildung.

4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+4y \\ x-y \\ 4y \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung.

5. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ x-y \end{pmatrix}$ ist keine lineare Abbildung.

6. $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$ ist eine lineare Abbildung.

7. Bezeichnet $C^1(\mathbb{R})$ den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen, $C^0(\mathbb{R})$ den Raum der stetigen Funktionen, so ist $C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung, denn

    1. $(f+g)' = f' + g'$, $f, g \in C^1(\mathbb{R})$.

2. $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir werden dies später noch ausführlicher behandeln.

8. Mit $M(m \times n, k) := \{(A_{ij}) \mid i = 1 \dots m, j = 1 \dots n, A_{ij} \in k\}$ bezeichnet man den Raum der *Matrizen* mit m-Zeilen und n-Spalten und *Koeffizienten* in k. Man schreibt

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mj} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Für $A, B \in M(m \times n, k)$ ist $A + B =: (A_{ij} + B_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und für $A \in M(m \times n, k)$, $B(n \times r, k)$ ist $A \cdot B =: C \in M(m \times r, k)$ mit $C_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n} A_{ip} B_{pj}$. Offenbar ist $k^m = M(m \times 1, k)$, also definiert die Matrizenmultiplikation mit $A \in M(m \times n, k)$ eine lineare Abbildung $k^n \to k^m$, nämlich:

$$T_A : k^n \to k^m, v \mapsto A \cdot v.$$

Falls kein Missverständnis möglich ist, werden wir die lineare Abbildung T_A wieder mit A bezeichnen.

8.4 Bemerkung

Bezeichnet $e_i \in \mathbb{R}^n$ den Vektor mit

$$(e_i)_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

also $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, so steht in der i-ten Spalte von A das Bild von e_i unter T_A, denn

$$T_A(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix},$$

wobei $A = (a_{ij})_{i=1 \dots m; j=1 \dots n}$. In der j-ten Spalte von A steht also $T_A(e_j)$.

8.5 Beispiel

$A = (1,2),\ T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + 2x_2.$

8.6 Notiz

Ist f eine lineare Abbildung, so ist $f(0) = 0$, denn $f(v) = f(0 + v) = f(0) + f(v)$.

8.7 Lemma und Definition

Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist der *Kern* von f:
$\ker f := \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subseteq V$ ein Untervektorraum von V
und das *Bild* von f:
$\mathrm{bild} f := \{f(x) \in W \mid x \in V\} \subseteq W$ ein Untervektorraum von W.

Beweis:

Sind $x, y \in \ker f$, so ist auch $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0$,
also $x + y \in \ker f$.

Ist $x \in \ker f$, $\lambda \in k$, so ist $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$,
also $\lambda \cdot x \in \ker f$ und $0 \in \ker f$ nach 8.6.

Ebenso folgt, dass $\mathrm{bild} f \subseteq W$ ein Untervektorraum von W ist:
$0 \in \mathrm{bild} f$, denn $0 = f(0)$. Sind $w_1, w_2 \in \mathrm{bild} f, w_1 = f(v_1),\ w_2 = f(v_2)$,
so ist $\lambda w_1 + w_2 = f(\lambda v_1 + v_2) \in \mathrm{bild} f$. $\square$

8.8 Lemma

Eine lineare Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = 0$ gilt.

Beweis: Sei $x, y \in V, f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt

$$f(x) = f(y)$$

$$\Longleftrightarrow f(x) - f(y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow f(x - y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow x - y \in \ker f \qquad \square$$

8.9 Beispiel

a) $A = (1,2)$.
Bild $A = \mathbb{R}$ und $\ker A = \mathbb{R} \cdot \binom{-2}{1}$. A ist nicht injektiv.

b) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Bild $A = \mathbb{R}^2$, denn $A \begin{pmatrix} -2y_1 + y_2 \\ \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. (*)

$\ker A = \{0\}$, denn $A\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0 \wedge x_2 = 0)$ wie das Lösen des Systems linearer Gleichungen ergibt. Also ist A injektiv. Also ist $A \in GL(\mathbb{R}^2)$. Die Umkehrabbildung zu T_A ist, wie man an (*) sieht durch T_B mit $B = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Offenbar ist $A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}$, also $B = A^{-1}$.

9 Basen und Dimensionen von Vektorräumen

Sei V ein k-Vektorraum.

9.1 Definition und Notiz

Sei $S \subseteq V$, dann heißt der kleinste Untervektorraum von V, der S enthält, die lineare Hülle oder der Span von S. Wir schreiben $< S >= LH(S) = \operatorname{span}(S)$. Sind $v_1, \ldots, v_r \in V$, so schreibt man $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \langle \{v_1, \ldots, v_r\} \rangle$ $= \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_r)$. Ist $U = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$, so heißen $v_1, \ldots, v_r$ ein *erzeugendes System* von U. Es ist dann $U = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid \lambda_i \in k\}$.

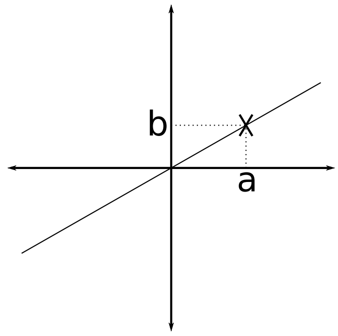
Beweis:

a) Offenbar ist $\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid \lambda_i \in k\} \subseteq < v_1 \ldots v_r >$, denn falls $v_1 \ldots v_r \in U$, so auch $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \in U$. Andererseits ist nach 7.6, Punkt 5. $\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid \lambda_i \in k\}$ ein Untervektorraum, also $\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid \lambda_i \in k\} \supseteq < v_1 \ldots v_r >$.

b) *Der* kleinste Untervektorraum, der S enthält, ist eindeutig bestimmt. Denn, sind U_1, U_2 zwei Untervektorräume, die S enthalten, so ist $S \subseteq U_1 \cap U_2$, und $U_1 \cap U_2$ ist wiederum ein Untervektorraum. □

9.2 Beispiele

1. $\operatorname{span}\left\{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\right\} = \left\{\lambda\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$



2. $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{span}\left\{\mathbb{R}^2 \times \{0\}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

9.3 Definition

Seien $v_1, \dots, v_r \in V$.

1. Ein Vektor $v \in V$ heißt *Linearkombination* von $v_1, \dots, v_r \in V$, wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k$ gibt mit $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$.

2. Die Vektoren $\{v_1, \dots, v_r\}$ heißen *linear unabhängig*, wenn aus $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ gilt. Sonst heißen $\{v_1, \dots, v_r\}$ *linear abhängig*.

3. $\{v_1, \dots, v_r\}$ heißen eine *Basis* von V, wenn $\{v_1, \dots, v_r\}$ linear unabhängig sind und $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_r) = V$ gilt.

9.4 Beispiele

1. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ sind linear abhängig.

2. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\right\}$ sind linear abhängig.

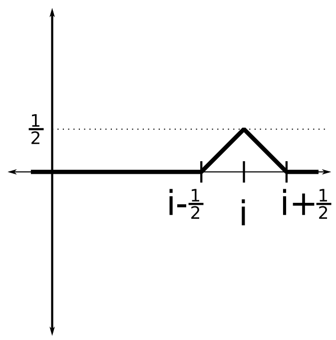
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sind linear unabhängig.

4. Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist $\{1, i\}$ eine Basis.
   Im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ sind $\{1, i\}$ linear abhängig, $\{1\}$ ist eine Basis.

5. Sei $V = C^0(\mathbb{R})$ und $\phi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi_i \in C^0(\mathbb{R})$ durch

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}] \\ x - i + \frac{1}{2} & x \in [i - \frac{1}{2}, i] \\ -x + i + \frac{1}{2} & x \in [i, i + \frac{1}{2}] \end{cases}$$

   definiert.



   $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N\}$ sind linear unabhängig für jedes $N \in \mathbb{N}$, denn aus $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \phi_i = 0$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = 0$, aber $\phi_1, \ldots \phi_N$ bilden für kein $N \in \mathbb{N}$ eine Basis für $C^0(\mathbb{R})$.

9.5 Definition und Notiz

Die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von k^n, die sogenannte *Standardbasis* $\mathcal{E}_n$.

9.6 Bemerkung

$\mathcal{E}_n$ ist natürlich *nicht* die einzige Basis von $\mathbb{R}^n$, z.B. ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine weitere Basis von $\mathbb{R}^n$.

9.7 Notiz

Sind $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig und ist $x \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_r\}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$, dann sind die $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ eindeutig bestimmt, denn

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i' v_i \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda_i') v_i = 0,$$

also folgt aus der linearen Unabhängigkeit von $\{v_1, \dots, v_r\}$, dass $\lambda_i - \lambda_i' = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$.

9.8 Satz

Sei V ein Vektorraum, $v_i \in V$ für $i = 1 \dots r$, so dass $\{v_1, \dots, v_r\}$ linear unabhängig ist. Sei $w \in V$. Dann ist $\{v_1, \dots, v_r, w\}$ genau dann linear abhängig, wenn $w \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_r)$.

Beweis:

„$\Longrightarrow$“ Sei $\{v_1, \dots, v_r, w\}$ linear abhängig. Dann existieren $\lambda_1 \dots \lambda_{r+1} \in k$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} w = 0 \tag{1}$$

und mindestens ein $\lambda_i \neq 0$. Ist $\lambda_{r+1} \neq 0$, so ist $w = -\frac{1}{\lambda_{r+1}}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_r)$. Ist $\lambda_{r+1} = 0$, so folgt aus (1)

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$$

und mindestens ein $\lambda_i \neq 0$, also ist $\{v_1, \dots, v_r\}$ linear abhängig im Widerspruch zur Voraussetzung.

„$\Longleftarrow$“ Ist $w \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_r)$, so existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k$ mit $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$, also $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r - w = 0$. $\square$

9.9 Basisergänzungssatz

Ist V ein k-Vektorraum, $U = \{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren, $W = \{w_1, \ldots, w_t\}$ ein erzeugendes System für V, dann ist $t \geq r$ und es gibt $j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, t\}$, so dass $\{u_1, \ldots, u_r, w_{j_1}, \ldots, w_{j_s}\}$ eine Basis von V ist. Insbesondere hat jeder Vektorraum mit endlich erzeugendem System eine endliche Basis.

Beweis: Siehe Literatur, z.B. Jänich, Lineare Algebra, 3.4.

9.10 Beispiele

$V = \mathbb{R}^4$

a) $u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

sind linear unabhängig, aber nicht erzeugend für $\mathbb{R}^4$.

b) $w = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$, damit können wir u zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen.

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$,

ebenso ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$,

aber nicht $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Sei jetzt $V = P_n^{\mathbb{R}}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n. Dann ist $\{1, x, \ldots, x^n\}$ eine Basis von V.

9.11 Korollar und Definition

Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ ebenfalls eine Basis von V, dann folgt aus 9.9 $n = m$. Die damit wohldefinierte Anzahl der Basisvektoren n eines (endlich erzeugten) Vektorraums heißt die *Dimension* des Vektorraums, man schreibt $\dim_k V := \dim V := n$.

9.12 Beispiele

1. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.
2. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$.
3. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.
4. $\dim_{\mathbb{R}} P_n = n+1$, denn $\{1, x, \ldots, x^n\}$ ist eine Basis von P_n.
5. $\dim_k M(m \times n, k) = m \cdot n$, denn $E_{ij} \in M(m \times n, k)$ mit $(E_{ij})_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js}$ bilden eine Basis von $M(m \times n, k)$.

9.13 Korollar

Ist $W \subseteq V$ ein Untervektorraum, so gilt $W = V$, genau dann, wenn $\dim V = \dim W$.

9.14 Satz

Ist V ein Untervektorraum, $U = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$. Dann gilt: U ist genau dann eine Basis von V, wenn $\phi_U : k^n \to V, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ ein Isomorphismus ist. ϕ_U heißt dann der durch U gegebene *Basisisomorphismus*. Insbesondere gilt dann $\phi_U(e_i) = u_i$. Genauer gilt: U ist genau dann linear unabhängig, wenn ϕ_U injektiv ist, und genau dann erzeugend, wenn ϕ_U surjektiv ist.

Beweis:

1. Offenbar ist ϕ_U ist linear.
2. Es gilt $\phi_U\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}\right) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$.
   Also ist $\ker \phi_U = 0 \iff \{u_1, \ldots, u_n\}$ linear unabhängig. Damit ist ϕ_U genau dann injektiv, wenn $\{u_1, \ldots, u_n\}$ linear unabhängig sind.
3. ϕ_U ist surjektiv $\iff \{u_1, \ldots, u_n\}$ ist erzeugendes System von V.

10 Der Rangsatz

Wir betrachten in diesem Kapitel nur Vektorräume endlicher Dimension, d.h. Vektorräume, die ein endliches erzeugendes System besitzen. Wir wollen den Begriff *Dimension* benutzen, um leichter Aussagen über Injektivität und Surjektivität treffen zu können.

10.1 Satz

Ist $f \in \mathrm{Hom}_k(U, V)$, so gilt

a) f ist genau dann injektiv, falls für jede linear unabhängige Teilmenge $\{u_1, \dots, u_r\}$ von U gilt: $\{f(u_1), \dots, f(u_r)\}$ ist linear unabhängig.

b f ist genau dann surjektiv, falls für eine, dann jede erzeugende Teilmenge $\{u_1, \dots, u_r\}$ von U gilt: $\{f(u_1), \dots, f(u_r)\}$ ist erzeugend für V.

c) f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für eine, dann jede Basis $\{u_1, \dots, u_r\}$ von U gilt: $\{f(u_1), \dots, f(u_r)\}$ ist Basis von V.

Beweis:

a) Sei $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $\{u_1, \dots, u_r\} \subseteq U$ eine linear unabhängige Teilmenge. Dann gilt

$$\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_r f(u_r) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r \in \ker f.$$

Ist f injektiv, also $\ker f = \{0\}$, so folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$, also ist $\{f(u_1), \dots, f(u_r)\}$ linear unabhängig.
Umgekehrt: Ist $\{f(u_1), \dots, f(u_r)\}$ linear unabhängig für eine Basis $\{u_1, \dots, u_r\}$ von U, so folgt $\ker f = 0$, also ist f injektiv.

b) Sei f surjektiv, $\{u_1, \dots, u_r\}$ eine erzeugende Teilmenge für U. Dann gibt es zu jedem $y \in V$ ein $x \in U$ mit $f(x) = y$. Da $\{u_1, \dots, u_r\}$ erzeugend ist, gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k$ mit $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i$, also

$$y = f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f(u_i),$$

also ist $\{f(u_1), \dots, f(u_r)\}$ erzeugende Teilmenge von V.
Umgekehrt: Ist $\{f(u_1), \dots, f(u_r)\}$ erzeugend, so existieren zu jedem $y \in V$ Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k$ mit

$$y = \sum_{i=1}^r \lambda_i f(u_i) = f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i u_i\right) \in \operatorname{bild} f,$$

also ist f jurjektiv, also ist auch für jede weitere erzeugende Teilmenge $\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_r\} \subseteq U$ das Bild $\{f(\tilde{u}_1), \dots, f(\tilde{u}_r)\} \subseteq V$ erzeugend.

c) Folgt aus a) und b). $\square$

10.2 Beispiel

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x) = \binom{1\ 2\ 3}{4\ 5\ 6}x$. f ist surjektiv, denn

$$\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

ist erzeugend, da

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2,$$

denn $\{\binom{1}{4}, \binom{2}{5}\}$ ist linear unabhängig, bildet also eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

10.3 Korollar

Zwei Vektorräume endlicher Dimension sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben. Insbesondere hat V genau dann die Dimension n, wenn es einen Isomorphismus $f : k^n \to V$ gibt.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Ist $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von W, so ist

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i$$

der gesuchte Isomorphismus.

„$\Leftarrow$“ Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, dann ist $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ eine Basis von W. □

10.4 Satz (Rangsatz)

Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann ist

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{bild} T = \dim V.$$

Beweis:
Sei $\dim \ker T = n \geq 0, \dim V - \dim \ker T = k \geq 0$. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\ker T$, $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k\}$ eine Basis von V. Dann ist $\{T(w_1), \ldots, T(w_k)\} \subseteq \operatorname{bild} T$ eine Basis von $\operatorname{bild} T$, denn:

1. $\operatorname{span}(w_1, \ldots, w_k) \cap \ker T = \{0\}$.
2. $\operatorname{span}(T(w_1), \ldots, T(w_k)) = \operatorname{bild} T$ (nach 10.1), denn $T : V \to \operatorname{bild} T$ ist surjektiv und $\operatorname{span}(T(w_1), \ldots, T(w_k)) = \operatorname{span}(T(v_1), \ldots, T(v_n), T(w_1), \ldots, T(w_k))$.

3. $\{T(w_1), \ldots, T(w_k)\}$ ist linear unabhängig, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(w_i) &= 0, \\
\overset{\text{Linearität}}{\Longleftrightarrow} \quad & T\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i\right) = 0 \\
\overset{\text{Def. ker}}{\Longleftrightarrow} \quad & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i \in \ker T \\
\overset{(1.)}{\Longleftrightarrow} \quad & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.
\end{aligned}$$

10.5 Definition

$\operatorname{rg} T := \dim \operatorname{bild} T$ heißt der *Rang* von T.

10.6 Korollar

Ist $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$, dann ist f genau dann injektiv, wenn es surjektiv ist, d.h. genau dann, wenn $\operatorname{rg} T = \dim V$ gilt.

11 Die Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Ist $A \in M(m \times n, k)$, dann definiert die Matrizenmultiplikation mit A eine lineare Abbildung $k^n \to k^m$, nämlich:

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, v \mapsto A \cdot v$$

Genauer definiert die Abbildung

$$M(m \times n, k) \to \operatorname{Hom}(k^n, k^m), A \mapsto T_A \tag{1}$$

eine injektive lineare Abbildung, und für $A \in M(m \times n, k), B \in M(n \times r, k)$ ist $T_{A \cdot B} = T_A \circ T_B \in \operatorname{Hom}(k^r, k^m)$. Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass die Abbildung (1) sogar ein Isomorphismus ist.

11.1 Notation

$$\begin{aligned}
GL(V) &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V, V) \mid f \text{ ist Isomorphismus}\} \\
GL(n, k) &:= \{A \in M(n \times n, k) \mid A \text{ ist invertierbar}\}
\end{aligned}$$

heißt die allgemeine lineare Gruppe. Offenbar sind $GL(V)$ und $GL(n, k)$ Gruppen und

$$GL(n, k) \to GL(k^n), A \mapsto T_A$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

11.2 Lemma

Ist $A = (a_1 \ldots a_n) \in M(m \times n, k)$, wobei $a_j \in k^m$ die Spalten von A sind, dann ist

$$\operatorname{bild} T_A = \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\},$$

denn $a_j = T_A(e_j)$ nach 10.1.

11.3 Definition

Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren, der *Rang* von A, ist

$$\operatorname{rg} A := \dim \operatorname{bild} T_A.$$

11.4 Lemma

Folgende Operationen ändern das Bild und damit den Rang einer Matrix nicht:

1. Vertauschen zweier Spalten.
2. Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar $\lambda \neq 0$.
3. Addition einer Spalte zu einer anderen.

11.5 Beispiel

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{3Sp.-2Sp.}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{3Sp.-2\cdot 1Sp.}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\text{denn aus } \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu \\ 0 \\ 3\mu \end{pmatrix} = 0 \text{ folgt } \lambda = \mu = 0.$$

11.6 Lemma

Folgende Operationen ändern den Kern und nach 10.3 damit den Rang einer Matrix nicht:

1. Vertauschen zweier Zeilen.
2. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$.
3. Addition einer Zeile zu einer anderen.

Beweis: Die Bestimmung des Kerns erfolgt durch Lösen eines Systems linearer Gleichungen, das durch 11.6, 1. - 3. in ein äquivalentes System übergeführt wird. □

Wir werden jetzt lineare Abbildungen durch Matrizen darstellen und können dann 11.4 und 11.6 auf beliebige lineare Abbildungen anwenden. Dazu ist es sinnvoll, statt einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ jeweils eine *geordnete* Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ zu betrachten.

11.7 Satz

Sind V, W Vektorräume der Dimension n und m mit geordneten Basen $v = (v_1, \ldots, v_n)$ und $w = (w_1, \ldots, w_m)$, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist durch

$$f_{v,w} := (a_{ij})_{i=1\ldots m; j=1\ldots n} \in M(m \times n, k) \text{ mit } f(v_j) =: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

eine $m \times n$-Matrix wohldefiniert. $f_{v,w}$ heißt die *Matrixdarstellung* von f bezüglich der Basen v, w. Es ist dann

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i \Longleftrightarrow f_{v,w} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

denn

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot a_{ij} \cdot w_i.$$

Damit ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) \to M(m \times n, k), f \mapsto f_{v,w}$$

invers zur Abbildung

$$\begin{array}{rcl} M(m \times n, k) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V, W) \\ A & \mapsto & \left(T_A : \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j\right) w_i\right)\right) \end{array}$$

für jede Basis v von V und w von W.
Insbesondere ist nach 8.4 $(T_A)_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m} = A$, wobei $\mathcal{E}_n := (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{E}_m := (e_1, \ldots, e_m)$ die Standardbasen in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ sind. □

11.8 Beispiele

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+3y \\ z-2x \end{pmatrix}$

$$f_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ denn}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$f_{e_1} = \underbrace{1}_{a_{11}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{2}_{a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1_{e_1} - 2_{e_2}.$$

$$f(e_2) = 3 \cdot e_1.$$

$$f(e_3) = 1 \cdot e_2.$$

2. Sei f wie in 1.

$$v := \{e_1, e_2, e_3\} = \mathcal{E}_3,\ w := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Dann ist

$$\left.\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \\ f(e_2) & = & 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \\ f(e_3) & = & -\frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{6} w_2 \end{array}\right\} \implies f_{v,w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

3. Sei f wie in 1.
$v = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$. $w = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
Dann ist $f(v_3) = w_2$, also $f_{v,w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $f : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_m, p \mapsto p'$. In $\mathcal{P}_n$ ist eine Basis durch $(1, x, \ldots, x^n) =: v$ gegeben. Dann ist

$$f_{v,v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

denn $(x^j)' = jx^{j-1}$.

11.9 Korollar

Ist $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, v eine Basis von V, w eine Basis von W, so ist $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f_{v,w}$ und $\dim\ker f = \dim\ker f_{v,w}$.

11.10 Bemerkung

Lineare Abbildungen sind durch Werte auf den Basisvektoren schon festgelegt, d.h. sind $f_i : V \to W$ linear für $i = 1, 2$, $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V und $f_1(v_i) = f_2(v_i)$ für $i = 1 \dots n$, so ist

$$f_1\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_1(v_i) \;=\; f_2\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right), \text{ also } f_1 = f_2.$$

11.11 Satz

Sind U, V, W Vektorräume und $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineare Abbildungen, so gilt für Matrixdarstellungen bezüglich Basen u, v, w:

$$g_{v,w} \cdot f_{u,v} = (g \circ f)_{u,w}.$$

Insbesondere ist für jeden n-dimensionalen Vektorraum V und jede Basis v von V durch

$$GL(V) \longrightarrow GL(n,k),\ f \mapsto f_{v,v}$$

ein Gruppenisomorphismus gegeben.
Nach 11.10 müssen wir dies nur für die Bilder von $u_j \in U$ verifizieren. Sei $\dim U = m, \dim V = n, \dim W = r$, und

$$\begin{aligned} f_{u,v} &= (a_{ij})_{i=1\dots n; j=1\dots m} \\ g_{v,w} &= (b_{ij})_{i=1\dots r; j=1\dots n} \end{aligned}$$

so ist

$$(g \circ f)(u_j) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} g(v_i) = \sum_{i=1,k=1}^{n,r} \underbrace{a_{ij} b_{ki}}_{(B\cdot A)_{kj}} \cdot w_k$$

11.12 Notiz

Seien $v = (v_1, \dots, v_n)$, $w = (w_1, \dots, w_m)$ Basen von V und W und $\phi_v : k^n \to V$, $e_i \mapsto v_i$, $\psi_w : k^m \to W$, $e_i \mapsto w_i$ die dadurch gegebenen Basisisomorphismen (vgl. 9.14). Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{f} & W & \\ \phi_v & \uparrow & & \uparrow & \psi_w \\ & k^n & \xrightarrow{f_{v,w}} & k^m & \end{array}$$

d.h. $f \circ \phi_v(x) = \psi_w(f_{v,w} \cdot x)$, denn es ist $f \circ \phi_v(e_i) = f(v_i) = \psi_w(f_{v,w_i})$ nach (2) für alle $e_i \in \mathcal{E}_n$.

11.13 Korollar

Seien $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v' = (v_1', \dots, v_n')$, $w = (w_1, \dots, w_m)$, $w' = (w_1', \dots, w_m')$ geordnete Basen von V und W mit $v_i' = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$ und $w_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ji} w_j'$. Dann ist

$$f_{v',w'} = B \cdot f_{v,w} \cdot A$$

mit $B = (b_{ij})_{i,j=1\dots m}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$.

Beweis: Sind $\phi_v, \phi_{v'}, \psi_w, \psi_{w'}$ wie in 11.12, so ist $\phi_{v'} = \phi_v \circ T_A$, denn

$$\phi_v \circ T_A e_i = \phi_v \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j = v_i' = \phi_{v'} e_i.$$

Ebenso ist $\psi_w = \psi_{w'} \circ T_B$, also ist $\psi_{w'}^{-1} = T_B \circ \psi_w^{-1}$, also

$$f_{v',w'} = \psi_{w'}^{-1} \circ f \circ \phi_{v'} = B \circ \psi_w^{-1} \circ f \circ \phi_v \circ A = B \cdot f_{vw} \cdot A.$$

$\square$

11.14 Beispiel

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + 3y \\ z - 2x \end{pmatrix},$$

$v = \mathcal{E}_2, \; w = \mathcal{E}_3.$

$$v' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \; w' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dann ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

$f_{v,w} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B \cdot f_{v,w} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

12 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Matrizen und lineare Abbildungen hängen eng mit linearen Gleichungssystemen zusammen.

12.1 Notiz und Notation

Sei $A \in M(m \times n, k)$, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in k$:

$x \in \ker A \Longleftrightarrow x \in \ker T_A$ (mit $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$)

$\Longleftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

$:\Longleftrightarrow$: $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ ist Lösung des durch (1) gegebenen homogenen Systems linearer Gleichungen.

Sei $b \in \mathbb{R}^m, b = (b_1, \dots, b_m)$:

$Ax = b$

$\Longleftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \tag{2}$$

$:\Longleftrightarrow$: x ist Lösung des durch (2) gegebenen *inhomogenen Systems linearer Gleichungen.*

12.2 Korollar

1. Die Lösungen der homogenen Gleichung (1) bilden einen Vektorraum, den Kern von A, d.h. sind x und x' Lösungen von (1), so auch λx für alle $\lambda \in k$ und $x + x'$.

2. Ist x eine Lösung der inhomogenen Gleichung (2), so ist die Menge *aller* Lösungen von (2) durch $\{x + v | v$ Lösung von $(1)\}$ gegeben.

3. Ist $\mathrm{rg}A = m$, so besitzt (2) für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ Lösungen.

4. Ist $\mathrm{rg}A = n$, so ist jede Lösung von (2), falls sie existiert, eindeutig.

5. Ist $n = m$, so hat (2) genau dann für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung, wenn (1) nur die triviale Lösung hat. Diese Lösung ist dann eindeutig.

12.3 Beispiel

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & z & = & 0 & & \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ y & + & z & = & 0 & & \end{array} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A}$$

Das Gleichungssystem hat den eindimensionalen Lösungsraum

$L = \{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$, denn offenbar ist $L \subseteq \ker A$ und $\mathrm{rg} A \geq 2$,

denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, also ist $\dim \ker A \leq 1$, also ist $L = \ker A$.

Betrachte das inhomogene System

$$\left.\begin{array}{ccc} x + z & = & 0 \\ 2x + y + 3z & = & 1 \\ y + z & = & 1 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Dann ist offenbar $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung von (3), d.h. der Lösungsraum von (3) ist durch $\left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 + \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ gegeben.

13 Multilineare Abbildungen und Determinanten

13.1 Definition

Seien V und W k-Vektorräume, $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$.

1. Unter einer *multilinearen Abbildung* (bzw. *r-linearen Abbildung*) versteht man eine Abbildung $\alpha : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r \times} \to W$, so dass

   $$\alpha(v_1, \ldots, \lambda v_i + v_i', \ldots, v_r) = \lambda\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) + \alpha(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_r)$$

   für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt.

2. Ist $\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, so heißt α *symmetrisch*.

3. Ist $\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = -\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, so heißt α *alternierend* oder *antisymmetrisch*.

4. Wir bezeichnen den Raum der r-linearen alternierenden Abbildungen auf V mit Werten in k mit $\mathrm{Alt}^r V$, den Raum der symmetrischen r-linearen Abbildungen auf V mit Werten in k mit $\mathrm{Sym}^r V$.

13.2 Beispiele und Notationen

1. Das *Standardskalarprodukt* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto < x, y > := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t \cdot y$ ist eine 2-lineare (bilineare) symmetrische Abbildung.
2. Das *Vektorprodukt* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto x \times y$ ist eine alternierende bilineare Abbildung.
3. Die *Determinante* $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto xy' - x'y$ ist eine *alternierende bilineare Abbildung.*
4. Ist $A \in M(n \times n, k)$, so ist die Abbildung

$$\alpha_A : k^n \times k^n \to k, \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^t \cdot Ay$$

bilinear.
Sie ist genau dann symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, d.h. wenn $A = A^t$.
Sie ist genau dann antisymmetrisch, wenn $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, d.h. wenn $A = -A^t$.

13.3 Notiz und Notation

Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W, so werden durch eine r-lineare Abbildung $\alpha : V \times \ldots \times V \to W$ die Zahlen $\alpha_{i_1,\ldots,i_r;\,j}$, wobei $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$ durch

$$\alpha(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_1,\ldots,i_r;\,j}\, w_j$$

wohldefiniert, die *Tensordarstellung* von α bezüglich der gegebenen Basis. Umgekehrt wird analog zu linearen Abbildungen, die durch Matrizen beschrieben werden, eine multilineare Abbildung vollständig durch ihre Tensordarstellung beschrieben. (vgl. 11.7 und 11.10).
Ist $W = k$, so schreibt man

$$\alpha_{i_1 \ldots i_r} := \alpha(v_{i_1} \ldots v_{i_r}).$$

13.4 Beispiele

1. Die Tensordarstellung des Standardskalarprodukts wird bzgl. $\mathcal{E}_m$ durch

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bezüglich der Standardbasis gegeben. Man schreibt $g_{ij} = \delta_{ij}$. δ_{ij} heißt *Kroneckersymbol.*

2. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto x \times y$, wird bezüglich der Standardbasis durch

$$\varepsilon_{ij;k} = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}\right) & \text{falls } i \neq j \neq k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also

$$\varepsilon_{ij;k} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ oder eine zyklische Permutation von } (1, 2, 3) \\ -1 & (i, j, k) = (2, 1, 3) \text{ oder eine zyklische Permutation von } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. ε heißt der *ε-Tensor.*

3. $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wird bezüglich der Standardbasis durch

$$\det{}_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) = (1, 2) \\ -1 & (i, j) = (2, 1) \\ 0 & i = j \end{cases}$$

beschrieben. $\det(x, y) = x^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y.$

4. $A \in M(n \times n, k), \alpha_A$ wie in 13.2, Punkt 4, so ist $(\alpha_A)_{ij} = A_{ij}$.

13.5 Bemerkung

Sowohl $\mathrm{Sym}^r V$ als auch $\mathrm{Alt}^r V$ bilden einen Vektorraum. Man überlegt sich leicht mit Hilfe von 13.3, dass $\dim(\mathrm{Alt}^r V) = \binom{n}{r}$ gilt, wobei $\dim V = n$.

13.6 Notiz und Definition

Jedes $\sigma \in S(n)$ lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Ist σ Produkt von k Transpositionen, so ist das *Signum* der Permutation durch $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^k$ gegeben. Dies ist wohldefiniert.

13.7 Lemma

Für eine multilineare Abbildung sind äquivalent:

1. α ist alternierend.
2. Falls $v_i = v_j$ für $i \neq j$, so ist $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$.
3. Falls $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear abhängig, so ist $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$.
4. Ist $\tau \in S(n)$ eine Permutation, so gilt: $\alpha(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)}) = \operatorname{sign}(\tau)\alpha(v_1, \ldots, v_k)$.

13.8 Satz und Definition

Es gibt genau eine n-lineare, alternierende Abbildung $\det : k^n \times \ldots \times k^n \to k$ mit $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Diese Abbildung heißt die *Determinante* und wird auch aufgefasst als Abbildung:

$$M(n \times n, k) \to k, A = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \mapsto \det(\alpha_1 \ldots \alpha_n) =: |A|.$$

Beweis: Ist $\beta \in \operatorname{Alt}^n k^n$ mit $\beta(e_1, \ldots, e_n) = 1$, so ist $\beta(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma)$, also

$$\begin{aligned} \beta\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{ni_n} e_{i_n}\right) &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1} \ldots a_{ni_n} \beta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(n)} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma) \qquad (1) \end{aligned}$$

Also ist $\det \in \operatorname{Alt}^n k^n$ durch $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$ eindeutig bestimmt.
Andererseits ist durch (1) auch die Existenz von $\beta \in \operatorname{Alt}^n k^n$
mit $\beta(e_1, \ldots, e_n) = 1$ gezeigt. □

Der Beweis zeigt auch, wie die Determinante explizit berechnet werden kann.

13.9 Folgerung Leibnizformel zur Berechnung der Determinante

Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Dann ist

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

13.10 Beispiel

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$$
$$+a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$

13.11 Korollar

Die Determinante ist auch multilinear und alternierend in den Zeilen, also $\det A^t = \det A$.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Determinanten ist in folgendem Lemma gegeben.

13.12 Lemma und Definition

Sei $A_{(ij)}$ die (ij)-*Minore* von A, d.h. die Matrix, die aus $A = (a_{ij})$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht. Dann kann $\det A$ induktiv durch

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{(ij)}) \tag{2}$$

für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ berechnet werden (Entwicklungsformel).

Beweis: Offenbar ist durch (2) eine Abbildung mit $\det(\mathbb{1}) = 1$ definiert. Dabei ist $(\mathbb{1}_{ij}) := (\delta_{ij})$ die Einheitsmatrix. Dass sie alternierend und multilinear ist, folgt mittels Induktion, (siehe Literatur, z.B. Jänich Lineare Algebra, Springer, S. 139). □

13.13 Notizen

Es gilt:

1. $n = 1$: $\det(a) = a$
2. $n = 2$: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
3. $n = 3$: (Regel von Sarrus)

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

4. $\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ für $\alpha_k \in \mathbb{R}^n$.

5. $\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \lambda\alpha_j, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) = \det(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) +$ $\underbrace{\lambda \det(\alpha_1, \ldots, \underbrace{\alpha_j}_{i\text{-te Spalte}}, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)}_{=0}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

13.14 Beispiele

1. Berechnung mit Hilfe der Entwicklungsformel (2):

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\overset{i=2}{=} -(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{i=3}{=} 1\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= -1 + (-1)\cdot 2 - 1\cdot(-2) \\
&= -1 - 2 + 2 \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

2. Berechnung mit Hilfe von 13.13, Punkt 4. und 5.:

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\overset{1.+4.Sp.}{=} \det\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\overset{i=2}{=} \det\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{1.-2\cdot 2.Sp.}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

Aus 13.11 und 13.12 folgt auch:

13.15 Lemma

$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{(ij)})$ für beliebiges $j \in \{1 \ldots n\}$.

13.16 Definition

Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Dann ist die *komplementäre Matrix* $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ durch

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{(ji)})$$

gegeben, wobei $A_{(ji)}$ die (ij)-Minore ist, also aus A durch Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte entsteht.

13.17 Beispiele

a) $\widetilde{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -12 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

13.18 Lemma

Es gilt : $\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \det A \cdot \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}.$

Insbesondere gilt: A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$ ist.

Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$.

Beweis:

$$(\tilde{A} \cdot A)_{rs} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{rj} a_{js} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{r+j} \cdot \det(A_{(jr)}) \cdot a_{js} = \begin{cases} \det A & r = s \\ \det A' & r \neq s \end{cases}$$

Wobei A' aus A hervorgeht, wenn man die r-te Spalte durch die s-te ersetzt, also $\det A' = 0$, da A' zwei gleiche Spalten enthält. □

13.19 Beispiele

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

13.20 Satz

Seien $A, B \in M(n \times n, k)$. Dann gilt $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det(BA)$.

Beweis:

Fall 1: Ist $\det A = 0$, so ist $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg} A < n$, da A nicht surjektiv ist, also ist auch $A \cdot B$ nicht surjektiv, also $\det(AB) = 0$.

Fall 2: Ist $\det A \neq 0$, so definiere $f : M(n \times n, k) \to k$, $X \mapsto \frac{\det(A \cdot X)}{\det A}$. Dann ist $f(\mathbb{1}) = 1$ und f ist multilinear und alternierend in den Spalten von X, also ist nach 13.8 $f(X) = \frac{\det(A \cdot X)}{\det A} = \det X$. □

13.21 Folgerung

Die invertierbaren $n \times n$-Matrizen bilden zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine (nicht abelsche) Gruppe, die wir mit $\mathrm{GL}(n, k)$ bezeichnen. $\det : GL(n, k) \to k \backslash \{0\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Die Determinante bietet nun eine einfache Möglichkeit um zu überprüfen, ob $A \in GL(k^n)$ ist.

13.22 Notiz

Es gilt: $A \in \mathrm{GL}(n, k) \iff \det A \neq 0 \iff T_A \in GL(k^n)$ ist ein *Isomorphismus.* $\iff$ Die Spalten von A bilden eine Basis von k^n.
Dies können wir nun auf $f \in \mathrm{End}(V)$ anwenden, wobei V ein Vektorraum mit $\dim V < \infty$ ist.

13.23 Satz und Definition

Ist V ein k-Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, v eine Basis von V, so ist $\det f := \det f_{v,v}$ unabhängig von der Wahl der Basis.

Beweis: Ist v' eine weitere Basis von V. Dann ist nach Korollar 11.13 $f_{v',v'} = B \cdot f_{v,v} \cdot A$, wobei B durch $v_i = \sum\limits_j b_{ji} v'_j$ und A durch $v'_i = \sum\limits_j a_{ji} v_j$ definiert ist. Also ist $A = B^{-1}$ und

$$\det f_{v',v'} = \det(A^{-1}) \cdot \det f_{v,v} \cdot \det A = (\det A)^{-1} \cdot \det f_{v,v} \cdot \det A = \det f_{v,v}.$$

□

13.24 Beispiel

$f : P_n \to P_n, p \mapsto p' + p$. Sei $v = (1, x, \dots, x^n)$ die Standardbasis in P_n. Dann ist

$$f_{v,v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 2 & & \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & n \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}, \text{ also} \det f = 1,$$

also ist f ein Isomorphismus und $(1, x+1, x^2+2x, \dots, x^n + nx^{n-1})$ eine Basis von P_n.

14 Skalarprodukte und Normen

14.1 Definition

Unter einem *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V versteht man eine symmetrische bilineare Abbildung $q : V \times V \to \mathbb{R}$, die *positiv definit* ist, d.h. für die gilt

1. q ist *positiv semidefinit*, d.h. $q(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$.
2. $q(v, v) = 0 \iff v = 0$

Eine symmetrische bilineare Abbildung heißt *negativ (semi-) definit*, falls $-q$ positiv (semi-) definit ist, sie heißt *indefinit*, wenn sie weder positiv noch negativ semidefinit ist.

14.2 Beispiele

a) $V = \mathbb{R}^n,\ q(v, w) = v^t \cdot w =: \langle v, w \rangle$.

b) $V = C^\infty([0, 1]),\ q(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

14.3 Notiz und Definition

Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R}), A^t = A$, dann ist durch

$$q_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto < v, Aw > := v^t \cdot A \cdot w$$

eine symmetrische bilineare Abbildung gegeben. A heißt positiv (semi-) definit bzw. negativ (semi-) definit bzw. indefinit falls q_A dies ist. $q_{\mathbb{1}}$ heißt das *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$.

Ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und q eine bilineare Abbildung auf V, so ist

$$q(e^{i\pi/4}v, e^{i\pi/4}v) = iq(v, v),$$

also gilt für $q \neq 0$ nie $q(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Um von Definitheit der Abbildung sprechen zu können, führt man die folgenden Abbildungen ein.

14.4 Definition

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $q : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt eine *hermitesche Sesquilinearform*, wenn gilt:

1. $q(v,w) = \overline{q(w,v)}$ für alle $v, w \in V$.

2. $q(v, w + \lambda w') = q(v,w) + \lambda q(v,w')$ für alle $v, w, w' \in V, \lambda \in k$.

14.5 Bemerkung

Aus 14.4, Punkt 1. folgt, dass für jede hermitesche Sesquilinearform auf V und jedes $v \in V$ gilt $q(v,v) \in \mathbb{R}$.

14.6 Definition

Ein *hermitesches Skalarprodukt* q auf V ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform, d.h. eine Sesquilinearform, für die gilt

1. q ist positiv semidefinit, d.h. $q(v,v) \geq 0$ für alle $v \in V$.

2. $q(v,v) = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

14.7 Beispiel

1. $V = \mathbb{C}^n$, $\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) := \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{v_i} \cdot w_i = \overline{v}^t \cdot w.$

2. Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $\overline{A}^t = A$, so ist

$$q_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (v,w) \mapsto (v, Aw) = \overline{v}^t \cdot Aw$$

   eine hermitesche Sesquilinearform.

14.8 Bemerkung und Definition

Ist $(q_{ij}) = Q$ die Tensordarstellung von q bezüglich $\mathcal{E}_n$, so ist $q(v,w) = \overline{v}^t Q w$. Die Matrix Q heißt die *Fundamentalmatrix* zu q. Die Fundamentalmatrix des Standardskalarprodukts ist $\mathbb{1}$.

14.9 Satz (Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung)

Sei V ein k-Vektorraum, $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei q ein (hermitesches) Skalarprodukt auf V. $||v||_q := (q(v,v))^{\frac{1}{2}}$. Dann ist

$$|q(v,w)| \;\leq\; ||v||_q ||w||_q$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\{v, w\}$ linear abhängig ist.

Beweis:
Für $w = 0$ ist die Formel offenbar richtig. Sei $w \neq 0$, setze $\lambda := \frac{q(w,v)}{q(w,w)^2}$.
Dann gilt:

$$0 \leq q(v-\lambda w, v-\lambda w) = ||v||_q^2 + |\lambda|^2 ||w||_q^2 - \lambda q(v,w) - \overline{\lambda} q(w,v) = ||v||_q^2 - \frac{|q(v,w)|^2}{||w||_q^2}.$$

□

14.10 Definition

Sei V ein k-Vektorraum. Eine Abbildung $|| \; || : V \to \mathbb{R}$ heißt eine *Norm* auf V, falls gilt:

1. $||v|| \geq 0$ für alle $v \in V$ und $||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$ (*Positivität*).
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (*Homogenität*).
3. $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ für alle $v, w \in V$ (*Dreiecksungleichung*).

14.11 Lemma

Ist q ein (hermitisches) Skalarprodukt auf V, so ist durch $||v||_q := (q(v,v))^{1/2}$ eine Norm auf V gegeben.

Beweis:

1. Die Positivität von $\|\cdot\|_q$ folgt aus der positiven Definitheit von q.
2. $\|\lambda v\|_q = (q(\lambda v, \lambda v))^{1/2} = (|\lambda|^2 q(v,v))^{1/2} = |\lambda| \, \|v\|_q$.
3. $\|v+w\|_q^2 = ||v||_q^2 + ||w||_q^2 + 2\mathrm{Re}\, q(v,w) \overset{14.8}{\leq} ||v||_q^2 + ||w||_q^2 + 2||v||_q \cdot ||w||_q = (\|v\|_q + \|w\|_q)^2$

14.12 Beispiele und Notation

1. Auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind durch $|\cdot|$ - wie in 5.18 und 6.4, Punkt 2 definiert - Normen gegeben.
2. Auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Norm durch

   $$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

   für $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ gegeben, die *Standardnorm* auf $\mathbb{R}^n$.

3. Auf $\mathbb{C}^n$ ist eine Norm durch
$$\|v\| = \sqrt{(v,v)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i v_i\right)^{1/2}$$
für $v = (v_1, \ldots, v_n)^t$ gegeben, die *Standardnorm* auf $\mathbb{C}^n$.

4. Auf k^n ist eine Norm durch $\|(x_1, \ldots, x_n)^t\|_\infty := \max\{|x_i| \mid i = 1 \ldots n\}$, die Maximumsnorm definiert, denn
   a) $\|x\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0$ für $i = 1 \ldots n$.
   b) $\|\lambda x\|_\infty = \max\{|\lambda x_i| \mid i = 1 \ldots n\} = |\lambda| \, \|x\|_\infty$.
   c) $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i| \mid i = 1 \ldots n\} \leq \max\{|x_i| + |y_i| \mid i = 1 \ldots n\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Die Norm $\| \; \|_\infty$ ist nicht durch ein Skalarprodukt gegeben, wie folgendes Lemma zeigt.

14.13 Lemma (Polarisationsformel)

Ist q ein Skalarprodukt auf V, so gilt für alle $v, w \in V$:
$$\|v + w\|_q^2 + \|v - w\|_q^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Beweis:
$$\begin{aligned} q(v+w, v+w) + q(v-w, v-w) &= \|v\|_q^2 + \|w\|_q^2 + q(v,w) + q(w,v) \\ &\quad + \|v\|_q^2 + \|w\|_q^2 - q(v,w) - q(w,v) \\ &= 2\|v\|_q^2 + 2\|w\|_q^2. \end{aligned}$$

□

14.14 Folgerung

Die Norm $\| \; \|_\infty$ auf k^n ist nicht durch ein Skalarprodukt gegeben, denn für
$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\|v + w\|_\infty = \|v - w\|_\infty = \|v\|_\infty = \|w\|_\infty = 1$.

14.15 Definition

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt *euklidischer Vektorraum*, ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem hermiteschen Skalarprodukt heißt *unitärer Vektorraum*.

14.16 Bemerkung

Für das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ gilt $< v, w >= |v||w| \cdot \cos\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen v und w ist, also $v \perp w \Longleftrightarrow < v, w >= 0$.

14.17 Definition

1. Sei (V, q) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Dann heißen $v, w \in V$ *orthogonal* zueinander, falls $q(v, w) = 0$ ist.

2. Eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V heißt *Orthonormalbasis*, wenn gilt: $q(v_i, v_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

14.18 Beispiel

$(e_1, \ldots, e_n)$ bildet eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ bezüglich des Standardskalarproduktes.

14.19 Lemma

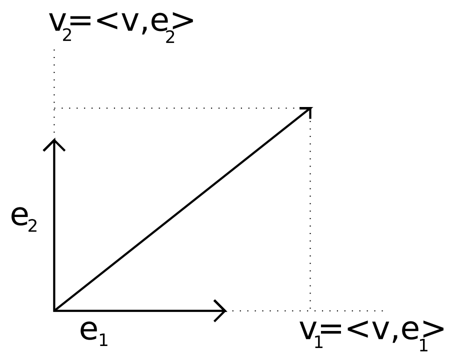
Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis eines Vektorraums V mit Skalarprodukt q und $v \in V$, dann gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} q(v_i, v) \cdot v_i,$$

denn ist $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$, so folgt

$$q(v_j, v) = q\left(v_j, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q(v_j, v_i) = \lambda_j$$

$\square$



14.20 Satz (Gram-Schmidt-Orthonormalisierung)

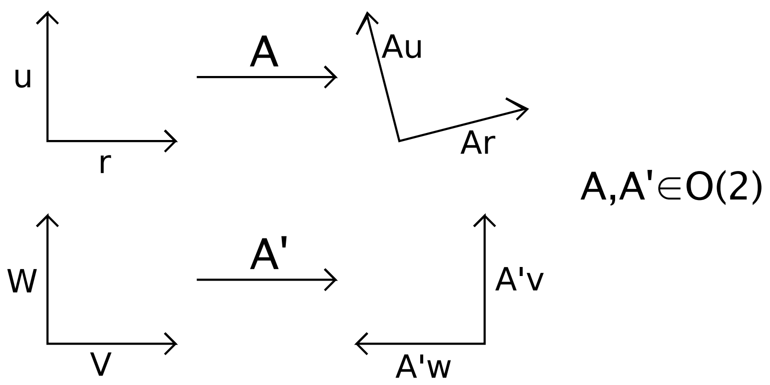
Ist V ein endlich dimensionaler Vektorraum mit (hermiteschem) Skalarprodukt q, so besitzt V eine Orthonormalbasis, genauer: Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so erhält man durch folgendes Verfahren eine Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von V, mit $\text{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \text{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$:

1. Setze $e_1 := \frac{v_1}{||v_1||_q}$.
2. $\tilde{v}_2 := v_2 - q(v_2, e_1)e_1$.
3. $e_2 := \frac{\tilde{v}_2}{||\tilde{v}_2||_q}$, induktiv definieren wir
4. $\tilde{v}_k := v_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} q(v_k, e_j)e_j$
5. $e_k := \frac{v_k}{||\tilde{v}_k||_q}$ $\square$.

Dann ist offenbar $\text{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \text{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ und $q(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

14.21 Definition

Ist (V, q) ein euklisicher (bzw. ein unitärer) Vektorraum, dann heißt eine lineare Abbildung $f : V \to V$ *orthogonal* (bzw. unitär), falls für alle $v, w \in V$ gilt $q(f(v), f(w)) = q(v, w)$. Ist speziell $V = \mathbb{R}^n$, $q =< \cdot, \cdot >$, so schreibt man $O(n) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) | < Av, Aw >=< v, w >, \text{ für alle } v, w \in \mathbb{R}^n\}$. $O(n)$ heißt die *orthogonale Gruppe*.
Die *unitäre Gruppe* ist durch
$U(n) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \,|\, (Av, Aw) = (v, w) \text{ für alle } v, w \in \mathbb{C}^n\}$ definiert.



14.22 Lemma

Orthogonale und unitäre Abbildungen sind bijektiv, denn ist $f(v) = 0$, so ist $0 = q(f(v), f(v)) = q(v, v)$, also $v = 0$. Ihre Inverse ist wieder orthogonal (bzw. unitär) und die Komposition von orthogonalen (bzw. unitären) Abbildungen ist ebenfalls orthogonal (bzw. unitär), d.h. die Menge der orthogonalen (bzw. unitären) Abbildungen $V \to V$ bildet eine Gruppe.

14.23 Lemma

a) Für $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ sind äquivalent:

   1. $A \in O(n)$.
   2. $A^t \cdot A = \mathbb{1}$.
   3. A^{-1} existiert und $A^{-1} = A^t$.
   4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.
   5. $A^t \in O(n)$
   6. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis.

b) Für $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ sind äquivalent:

   1. $A \in U(n)$.
   2. $\overline{A}^t A = \mathbb{1}$.
   3. A^{-1} existiert und $A^{-1} = \overline{A}^t$.
   4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$.
   5. $A^t \in U(n)$.
   6. $\overline{A} \in U(n)$.
   7. $\overline{A}^t \in U(n)$.
   8. Die Zeilen von A bilden ein Orthonormalsystem.

Beweis: Wir beweisen nur 14.23, a). Teil b) folgt analog.

$2 \Leftrightarrow 3, 1 \Rightarrow 4$ und $4 \Rightarrow 3$ ist klar. Zu zeigen ist nur $1 \Longleftrightarrow 2$, dann folgt $5 \Longleftrightarrow 1$ aus $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ und $6 \Longleftrightarrow 5$ folgt aus $1 \Rightarrow 4$.

$A \in O(n)$.

$\Longleftrightarrow < Av, Aw >=< v, w >$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

$\Longleftrightarrow (Av)^t \cdot (Aw) = v^t \cdot w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

$\Longleftrightarrow v^t \cdot A^t \cdot A \cdot w = v^t \cdot w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

$\Longleftrightarrow A^t \cdot A = \mathbb{1}$, wie man leicht durch Einsetzen der Basisvektoren e_i und e_j für v und w zeigt. Damit ist $1 \Longleftrightarrow 2$ gezeigt. $\square$

14.24 Notiz

Ist $A \in O(n)$ oder $A \in U(n)$, so ist $|\det A| = 1$,
denn $\det(\overline{A}^t \cdot A) = |\det A|^2 = 1$.

14.25 Definition

$SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ heißt die *spezielle orthogonale Gruppe.*
$SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ heißt die *spezielle unitäre Gruppe.*

14.26 Beispiele

a) $O(1) = \{+1, -1\}$.

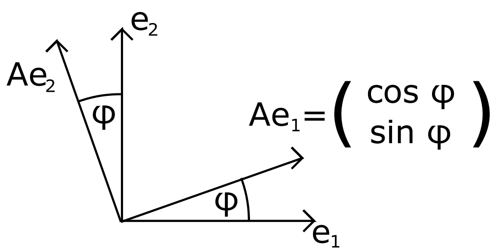
b) $U(1) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

c) $A \in O(2) \iff A = \begin{pmatrix} a & \mp b \\ b & \pm a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$

d) $A \in SO(2) \iff A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$, also

$A \in SO(2) \iff A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$,

d.h. A ist Drehung um den Winkel φ.



e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2)$. A ist Spiegelung an der x-Achse.

f) $A = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$, falls $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

$SU(2)$ heißt auch *Quaternionengruppe* oder Spin(3).

g) $A = \begin{pmatrix} a & -e^{iv}\overline{b} \\ b & e^{iv}\overline{a} \end{pmatrix} \in U(2)$, falls $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

15 Eigenwerte und Eigenvektoren

15.1 Definition

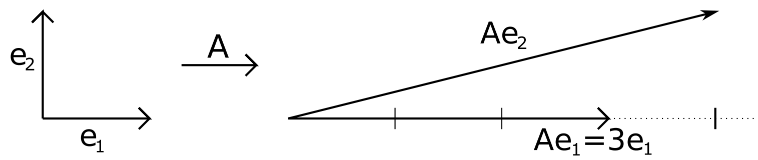
Sei V ein k-Vektorraum ($k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Unter einem *Eigenwert* λ einer k-linearen Abbildung f versteht man ein $\lambda \in k$, sodass ein $v \in V \backslash \{0\}$ existiert mit $f(v) = \lambda v$.

Der Vektorraum $\mathcal{E}_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v\}$ heißt der *Eigenraum* zum Eigenwert λ. Die Dimension von $\mathcal{E}_\lambda$ heißt die (*geometrische*) *Vielfachheit* von λ, ein Vektor $v \in \mathcal{E}_\lambda$ mit $v \neq 0$ heißt *Eigenvektor* zum Eigenwert λ.

15.2 Beispiele

1. Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Dann ist 3 Eigenwert von A der Vielfachheit 1 und $\mathcal{E}_3 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

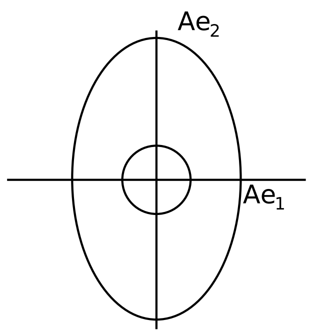


2. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Dann sind λ_1 und λ_2 Eigenwerte von A.

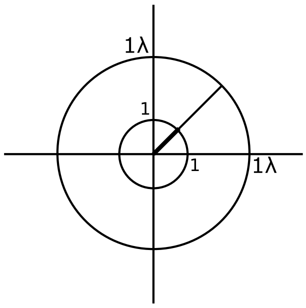
   1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann ist $\mathcal{E}_{\lambda_1} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_{\lambda_2} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Dann ist $\mathbb{R}^2 = \mathcal{E}_\lambda$.

   Die folgende Abbildung zeigt das Bild des Einheitskreises unter der Abbildung A.

   $\lambda_1 \neq \lambda_2$



   $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$



3. $V = C^\infty(\mathbb{R}),\ Af = \frac{d}{dx} f$. Dann ist jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ Eigenwert mit Vektor $v = e^{\alpha x}$.

15.3 Lemma und Definition

Sei V ein n-dimensionaler k-Vektorraum, $A \in \mathrm{End}(V)$, dann ist $\lambda \in k$ Eigenwert von A

$$\Longleftrightarrow \underset{v \neq 0}{\exists} : Av = \lambda v \Longleftrightarrow \ker(A - \lambda \mathbb{1}) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \boxed{\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0}$$

Ferner gilt: $\mathcal{E}_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$. Das Polynom n-ter Ordnung $p(t) = \det(A - t\mathbb{1})$ heißt *charakteristisches Polynom.*

Beweis: Zu zeigen ist nur, dass die Ordnung von $p(t)$ gleich n ist. Dies folgt leicht aus der Leibnizformel.

15.4 Notiz und Definition

Jede Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ besitzt komplexe Eigenwerte, da jedes Polynom komplexe Nullstellen hat. Ist das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \Pi(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, so heißt m_i die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwerts λ_i.

15.5 Beispiel

$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos(\phi) - \lambda & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) - \lambda \end{pmatrix} &= (\cos(\phi) - \lambda)^2 + \sin^2(\phi) \\ &= 1 - 2\lambda\cos(\phi) + \lambda^2 \end{aligned}$$

Nullstellen $\lambda_{1/2} = \cos(\phi) \pm \sqrt{\cos^2(\phi) - 1} = \cos\phi \pm i \sin\phi$, also hat A, für $\phi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ *keine reellen* Eigenwerte, aber die beiden komplexen Eigenwerte $\cos(\phi) \pm i \cdot \sin(\phi)$.

15.6 Lemma

Sei V ein k-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ verschiedene Eigenwerte von f und v_i Eigenvektoren zu λ_i für $i = 1, \ldots, r$. Dann sind $\{v_1, \ldots, v_r\}$ linear unabhängig, insbesondere ist $\mathcal{E}_{\lambda_i} \cap \mathcal{E}_{\lambda_j} = \{0\}$ für $i \neq j$.

Beweis durch Induktion nach r:

Induktionsbeginn $r = 2$:

> Seien λ_1 und λ_2 Eigenwerte, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, mit Eigenvektoren v_1 und v_2, also $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ und $f(v_2) = \lambda_2 v_2$.
>
> Angenommen, es existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $v_1 = \mu v_2$, dann ist
> $\lambda_1 v_1 = f(v_1) = f(\mu v_2) = \mu \lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

Induktionsannahme:

Sei die Behauptung bewiesen für r verschiedene Eigenwerte.

Induktionsschritt :

> Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}$ verschiedene Eigenwerte von f.
>
> Angenommen, es gibt $v \in \mathcal{E}_{\lambda_{r+1}}$ mit $v \neq 0$ und $v_1, \ldots, v_r$ mit $v_j \in \mathcal{E}_{\lambda_j}$, so dass $\{v_1, \ldots, v_r, v\}$ linear abhängig sind. Aufgrund der Induktionsannahme können wir dann o.B.d.A annehmen, dass
>
> $$v = v_1 + \cdots + v_r. \tag{1}$$
>
> gilt. Dann folgt $f(v) = f(v_1) + \cdots + f(v_r)$, also, da $v_j \in \mathcal{E}_{\lambda_j}$
>
> $$\lambda_{r+1}\, v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r\, v_r. \tag{2}$$
>
> Multiplikation von (1) mit λ_{r+1} ergibt andererseits
>
> $$\lambda_{r+1}\, v = \lambda_{r+1}\, v_1 + \cdots + \lambda_{r+1}\, v_r. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt $(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\, v_1 + \cdots + (\lambda_1 - \lambda_{r+1})\, v_r = 0$.
Wegen $\lambda_j \neq \lambda_{r+1}$ für $j \neq r+1$ ist dies ein Widerspruch zur Induktionsannahme. $\square$

15.7 Korollar

Sei $f \in \mathrm{End}(V), \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ Eigenwerte von f. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{r} \dim \mathcal{E}_{\lambda_i} \leq \dim V.$$

15.8 Satz und Definition

Sei $f : V \to V$ linear und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ verschiedene Eigenwerte von f. Ist

$$\dim V = \sum_{i=1}^{m} \dim \mathcal{E}_{\lambda_i}$$

so hat V eine Basis v von Eigenvektoren von f und f hat bezüglich dieser Basis die Matrixdarstellung $f_{v,v}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & & & \\ \vdots & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_m & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Dabei ist die Vielfachheit von λ_j in der Matrix durch $\dim \mathcal{E}_{\lambda_j}$ gegeben. Der Endomorphismus f heißt dann *diagonalisierbar*.

Beweis: Sei $\{v_1^j, \ldots, v_{n_j}^j\}$ eine Basis von $\mathcal{E}_{\lambda_j}$. Wegen 15.6 ist dann

$$\{v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1, v_1^2, \ldots, v_{n_2}^2, \ldots, v_1^m, \ldots, v_{n_m}^m\}$$

linear unabhängig, also wegen $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = \dim V$ eine Basis von V. Aus $f(v_i^j) = \lambda_j v_i^j$ folgt die Behauptung. $\square$

15.9 Beispiele

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 5$ mit
   Eigenvektoren $v_1 = \binom{2}{-1}$ und $v_2 = \binom{1}{2}$.
   Also ist bezüglich (v_1, v_2) A durch $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ gegeben.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat nur den Eigenwert $\lambda_1 = 1$, denn $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$.

Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \ker\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \ker\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

also ist $\dim \mathcal{E}_1 = 1$, also ist A *nicht* diagonalisierbar.

15.10 Korollar

Ist A diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ und $\dim \mathcal{E}_\lambda = n_j$, so ist $\det A = \lambda_1^{n_1} \ldots \lambda_m^{n_m}$.

Im Allgemeinen sind Matrizen nicht diagonalisierbar, aber es gilt:

15.11 Satz

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von A, $\dim \mathcal{E}_{\lambda_j} = n_j$, also $\sum_{j=1}^r n_j \leq n$. Dann gibt es ein $T \in GL(n, \mathbb{C})$, so dass

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} J_1^1 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & & & & & & \vdots\\ \vdots & & J_1^{n_1} & & & & & \vdots\\ \vdots & & & J_2^1 & & & & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & & & & & J_2^{n_2} & & \vdots\\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & J_r^{n_r} \end{pmatrix}$$

wobei

$$J_i^\ell = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M(m_{i,\ell} \times m_{i,\ell}, \mathbb{C})$$

für ein $m_{i,\ell} \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $\sum_{i,\ell} m_{i,\ell} = n$.
J heißt die *Jordanform* von A.

Beweis: Z.B. Th. Bröcker, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Springer. Man betrachtet dazu verallgemeinerte Eigenräume, d.h. Vektoren für die gilt $(A - \lambda)^m v = 0$.

15.12 Beispiele

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$.

1. $n = 2$.
   Hat A zwei Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist die Matrix diagonalisierbar.

   $$\text{Die Jordanform ist } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

   Hat A nur einen Eigenwert λ und ist $\dim \mathcal{E}_\lambda = 2$, so ist A ebenfalls diagonalisierbar.

   $$\text{Die Jordanform ist } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Hat A nur einen Eigenwert λ und ist $\dim \mathcal{E}_\lambda = 1$,

   $$\text{so ist die Jordanform } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. $n = 3$.
   Hat A zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$, und ist $\dim \mathcal{E}_{\lambda_1} = 1$ und $\dim \mathcal{E}_{\lambda_2} = 1$, und ist $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)^2$, so hat A die Jordanform

   $$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

   Hat A nur einen Eigenwert λ mit $\dim \mathcal{E}_\lambda = 1$, so ist

   $$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Hat A nur einen Eigenwert λ mit $\dim \mathcal{E}_\lambda = 2$, so ist

   $$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   In allen anderen Fällen ist A diagonalisierbar.

16 Selbstadjungierte und hermitesche Endomorphismen

16.1 Satz und Definition

Ist (V, q) ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum endlicher Dimension, $f \in \mathrm{End}(V)$, so gibt es genau eine Abbildung $f^* : V \to V$ mit $q(f^*(x), y) = q(x, f(y))$ für alle $x, y \in V$. f^* heißt die *adjungierte* Abbildung zu f.

Ist A die Matrixdarstellung von f bezüglich einer Orthonormalbasis, so ist die Matrixdarstellung A^* von f^* durch $A^* = A^t$ für $k = \mathbb{R}$, bzw. $A^* = \bar{A}^t$ für $k = \mathbb{C}$ gegeben.

Beweis: Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Setze

$$f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} q(f(e_i), x)e_i.$$

Dann ist $f^* \in \mathrm{End}(V)$ und

$$\begin{aligned}
q(f^*(x), y) &= \sum_{i=1}^{n} q\Big(q(f(e_i), x)e_i, y\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{q\big(f(e_i), x\big)}\, q(e_i, y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} q\Big(x, f(e_i)\Big)\, q(e_i, y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} q\Big(x, f(e_i)\, q(e_i, y)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} q\Big(x, f(q(e_i, y)e_i)\Big) \\
&= q(x, f(y)).
\end{aligned}$$

Ist $\tilde{f} \in \mathrm{End}(V)$ eine weitere Abbildung mit $q(\tilde{f}(x), y) = q(x, f(y))$ für alle $x, y \in V$, so ist $q((f^* - \tilde{f})(x), y) = 0$ für alle $x, y \in V$, also $f^*(x) = \tilde{f}(x)$ für alle $x \in V$, also $f^* = \tilde{f}$. □

Die Matrixkoeffizienten bezüglich $(e_1, \ldots, e_n)$ sind für f^* wegen 16.1 durch (b_{ij}) mit

$$b_{ij} = q(f(r_i), e_j) = \overline{q(e_j, f(e_i))} = \overline{a_{ji}},$$

gegeben, wobei (a_{ij}) die Matrixdarstellung von f ist.

16.2 Definition

Sei (V, q) ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum.

1. $f \in \text{End}(V)$ heißt *normal*, falls $f^* \circ f = f \circ f^*$.
2. $f \in \text{End}(V)$ heißt *selbstadjungiert* oder *symmetrisch* (bzw. *hermitesch*), falls gilt:

$$\boxed{q(f(u), v) = q(u, f(v))} \quad \text{für alle } u, v \in V, \text{ d.h. falls } f^* = f \text{ gilt.}$$

16.3 Notiz

1. Jede orthogonale und jede unitäre Abbildung ist *normal*.
2. Jede selbstadjungierte und jede hermitesche Abbildung ist *normal*.

Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $<,>$ das Standardskalarprodukt, so ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ selbstadjungiert $\Longleftrightarrow A^t = A$.

Ist $V = \mathbb{C}^n$ und $(\ ,\ )$ das Standard hermitesche Skalarprodukt, so ist $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ hermitsch $\Longleftrightarrow \bar{A}^t = A$.

16.4 Lemma

Ist A normal, so ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann Eigenwert von A, wenn $\bar{\lambda}$ Eigenwert von A^* ist und für die Eigenräume gilt $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}^*_{\bar{\lambda}}$.

Beweis: Sei A normal. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|(A-\lambda)x\|^2 &= q\Big((A-\lambda)x, (A-\lambda)x\Big) \\
&= q\Big(x, (A^* - \overline{\lambda})(A-\lambda)x\Big) \\
&= q\Big(x, (A-\lambda)(A^* - \overline{\lambda})x\Big) \\
&= q\Big((A^* - \bar{\lambda})x, (A^* - \bar{\lambda})x\Big) \\
&= \|(A^* - \bar{\lambda})x\|^2,
\end{aligned}$$

also $x \in \ker(A - \lambda) \Longleftrightarrow x \in \ker(A^* - \bar{\lambda})$. □

Für hermitesche Operatoren gilt sogar:

16.5 Lemma

Alle Eigenwerte einer hermiteschen Abbildung sind reell.

Beweis: Aus $f(v) = \lambda v$ für $v \neq 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
&\bar{\lambda} q(v, v) = q(f(v), v) = q(v, f(v)) = q(v, \lambda v) = \lambda q(v, v) \\
&\Longleftrightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

□

16.6 Lemma

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer normalen Abbildung sind zueinander orthogonal.

Beweis: Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $f(v_j) = \lambda_j v_j$ für $j = 1, 2$, so ist

$$\lambda_1 q(v_1, v_2) = q(f^*(v_1), v_2) = q(v_1, f(v_2)) = \lambda_2 q(v_1, v_2)$$

$$\iff q(v_1, v_2) = 0. \qquad \square$$

16.7 Lemma

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und mit $f(u) \in U$ für alle $u \in U$ und $U^\perp := \{x \in V \mid q(x, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$, dann gilt $f^*(u) \in U^\perp$ für alle $u \in U^\perp$.

Beweis: Für alle $u \in U, w \in U^\perp$ gilt

$$0 \;=\; q(w, f(u)) \;=\; q(f^*(w), u),$$

also $f^*(w) \in U^\perp$. $\square$

Mit Hilfe von 16.5, 16.6 und 16.7 zeigt man folgenden Satz:

16.8 Satz

Ist $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ normal, so besitzt V eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren über $\mathbb{C}$ zu f. Ist $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ symmetrisch, dann gibt es sogar eine reelle Orthonormalbasis von V von Eigenvektoren von A.

Beweis: Literatur (z.B. Goldhorn, Heinz, Mathematik für Physiker I, Abschnitt 7).

Der Beweis ist durch Induktion nach der Dimension von V. Die Idee ist folgende:
Jede lineare Abbildung f besitzt mindestens einen komplexen Eigenwert, für dessen Eigenraum U gilt also $f^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$. Die Abbildung $f^*|U^\perp$ ist wiederum normal und besitzt also nach Induktionsannahme eine Basis aus Eigenvektoren. Diese sind aber auch Eigenvektoren von f^* und damit auch von f.

16.9 Korollar

1. Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A^t = A$, so existiert ein $T \in O(n)$, sodass $T^t \cdot A \cdot T =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}, \ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

2. Ist $A = M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $\bar{A}^t = A$, so existert ein $T \in U(n)$, sodass $\bar{T}^t \cdot A \cdot T =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}, \ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

3. Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ normal, so existiert ein $T \in U(n)$, sodass $\bar{T}^t \cdot AT =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}, \ \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Beweis:

Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von Eigenvektoren mit $Av_1 = \lambda_1 v_1 \dots Av_n = \lambda_r v_n$, so hat $T^{-1}AT$ mit $T = (v_1, \dots, v_n)$ Diagonalgestalt wie behauptet. In den hier behandelten Fällen ist es möglich, $(v_1, \dots, v_n)$ als Orthonormalbasis zu wählen. Dann ist $T \in O(n)$ bzw. $T \in U(n)$ und $T^{-1} = \bar{T}^t$. $\square$

Sei jetzt A symmetrisch bzw. hermitesch. Betrachten wir die symmetrische lineare bzw. sesquilineare Abbildung q_A, die durch A gegeben ist. Die Tensordarstellung dieser Abbildung bezüglich einer Orthonormalbasis von Eigenvektoren ist dann durch eine Diagonalmatrix wie in 16.9, Punkt 2. gegeben. Damit sieht man leicht

16.10 Lemma

Ist $A \in M(n \times n, k)$ symmetrisch (bzw. hermitesch), so ist die zugehörige bilineare (bzw. sesquilineare) Abbildung q_A genau dann

positiv semidefinit,	falls für alle Eigenwerte λ_i gilt: $\lambda_i \geq 0$,
positiv definit,	falls für alle Eigenwerte λ_i gilt: $\lambda_i > 0$,
negativ semidefinit,	falls für alle Eigenwerte λ_i gilt: $\lambda_i \leq 0$,
negativ definit,	falls für alle Eigenwerte λ_i gilt: $\lambda_i < 0$
	für alle $i = 1, \ldots, r$.

16.11 Lemma

Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C}), A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ mit $\bar{A}^t = A$,

also $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ist genau dann positiv definit, falls für die Determinanten

aller Hauptabschnittsmatrizen $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}$, $k = 1, \ldots, n$ gilt: $\det A_k > 0$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Ist A positiv definit, so sind alle Eigenwerte > 0, also auch $\det A > 0$. Ebenso ist $q_A \,|\, \mathbb{R}^k \times 0$ für $k \in \{1 \ldots n\}$ positiv definit, also auch $\det A_k > 0$ für $k = 1 \ldots n$.

„$\Leftarrow$“ Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach n.

Induktionsbeginn: Für $n = 1$ ist die Behauptung klar.

Induktionsannahme: Die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Induktionsschritt: Sei A eine $(n+1) \times (n+1)$ Matrix, deren Hauptabschnittsdeterminanten alle positiv sind. Nach Induktionsannahme ist $q_A \,|\, \mathbb{R}^n \times 0$ positiv definit. Angenommen, es gibt ein v mit $q_A(v, v) = -a^2 \leq 0$. Dann ist $v \notin \mathbb{R}^n \times 0$.
Wähle eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $(v_1, \ldots, v_n)$ von A_n.

Dann ist $(v_1, \dots, v_n, v)$ Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$. Bezüglich dieser Basis ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & \bar{x}_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_n & \bar{x}_n \\ x_1 & \dots & x_n & -a^2 \end{pmatrix},$$

also $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot \left(-a^2 - \frac{|x_1|^2}{\lambda_1} - \dots - \frac{|x_n|^2}{\lambda_n}\right)$.
Widerspruch zur Voraussetzung. □

16.12 Beispiel

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit:

$\det A_1 = 4$
$\det A_2 = 11 > 0$
$\det A_3 = 24 - 12 - 2 = 10 > 0$

$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist negativ definit, denn $-A$ ist positiv definit.

16.13 Definition

Sei A symmetyrisch oder hermitesch. Seien $\lambda_j, j = 1 \dots r$ die positiven Eigenwerte mit Vielfachheit n_j und $\mu_j, j = 1 \dots s$ die negativen Eigenwerte mit Vielfachheit m_j.

Sei $R = \sum_{j=1}^{r} n_j,\ S = \sum_{j=1}^{s} m_j$. Dann heißt:

$R + S$ der *Rang* von A
$R - S$ die *Signatur* von A
S der *Index* von A.

16.14 Beispiel

$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Wegen $\det A < 0$ hat A einen positiven und einen negativen Eigenwert. Der Rang von A ist also 2, die Signatur 0 und der Index 1.